



Јуниорска Македонска математичка олимпијада 2019

Машински факултет - Скопје, Република Македонија

26.05.2019

1. Најди ги сите прости броеви од облик $1 + 2^p + 3^p + \dots + p^p$ каде p е прост број.

Решение. *Прв начин.* За $p = 2$ го добиваме бројот $1 + 2^2 = 5$, кој е прост број. Нека $p > 2$ односно нека p е непарен број. Тогаш бројот

$$1 + 2^p + 3^p + \dots + p^p = (1^p + (p-1)^p) + (2^p + (p-2)^p) + \dots + \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)^p + \left(\frac{p+1}{2}\right)^p\right) + p^p$$

е делив број со p , бидејќи секој од броевите во заградите е делив со p . Навистина, од $k^p \equiv k^p \pmod{p}$, $p - k \equiv -k \pmod{p}$ и $(p - k)^p \equiv (-k)^p \equiv -k^p \pmod{p}$,

следува $k^p + (p - k)^p \equiv k^p - k^p \equiv 0 \pmod{p}$. Значи, секој број од облик $1 + 2^p + 3^p + \dots + p^p$ е сложен за произволен непарен прост број p .

Конечно, единствено решение на проблемот е бројот 5 кој се добива за $p = 2$.

Втор начин. Од малата теорема на Ферма следува дека $a^p \equiv a \pmod{p}$, за секој природен број a и секој прост број p . Тогаш

$$1 + 2^p + 3^p + \dots + p^p \equiv 1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p}.$$

Ако p е непарен број, $p + 1$ е парен од каде следува дека $\frac{p(p+1)}{2} \equiv 0 \pmod{p}$, што е значи дека во овој случај задачата нема решение. За $p = 2$ добиваме $1 + 2^2 = 5$, па затоа единствено решение на задачата е бројот 5. ■



Јуниорска Македонска математичка олимпијада 2019

Машински факултет - Скопје, Република Македонија

26.05.2019

2. Кружниците ω_1 и ω_2 се сечат во две точки A и B . Нека t_1 и t_2 се тангентите на ω_1 и ω_2 , соодветно, низ точката A . Нека вториот пресек на ω_1 и t_2 е C , а вториот пресек на ω_2 и t_1 е D . На полуправата AB , дадени се точки P и E , така што B е помеѓу A и P , P е помеѓу A и E и $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{AP}$. Опишаната кружница на $\triangle BCE$ ја сече t_2 по втор пат во точка Q , а опишаната кружница на $\triangle BDE$ ја сече t_1 по втор пат во точка R . Докажи дека точките P , Q и R се колинеарни.

Решение. Од својството за агол меѓу тангентата t_1 и тетивата AB во ω_1 имаме $\angle BCA = \angle BAD$. Од тетивниот четириаголник $BCQE$ имаме $\angle QEB + \angle QCB = 180^\circ$. Значи,

$$\angle QEA \equiv \angle QEB = 180^\circ - \angle QCB = \angle BCA = \angle BAD \equiv \angle EAR,$$

па бидејќи наизменичните агли на трансверзалата EA се еднакви, добиваме $QE \parallel AR$.

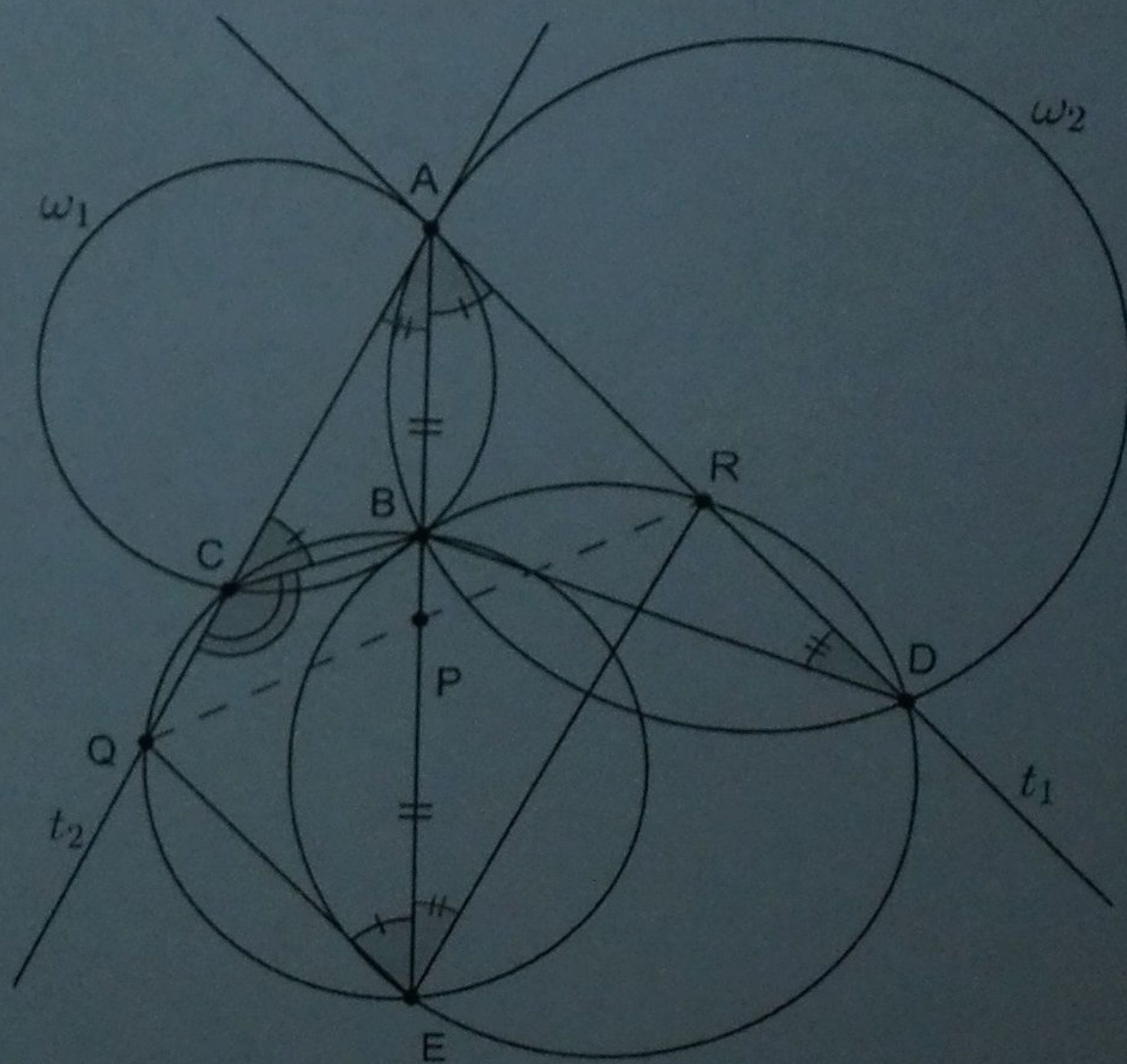
Од својството за агол помеѓу тангентата t_2 и тетивата AB во ω_2 имаме $\angle ADB = \angle BAC$.

Од тетивниот четириаголник $BRDE$ имаме $\angle REB = \angle RDB$. Значи,

$$\begin{aligned} \angle REA &\equiv \angle REB = \angle RDB \equiv \angle ADB = \angle BAC \\ &\equiv \angle EAQ, \end{aligned}$$

па бидејќи наизменичните агли на трансверзалата EA се еднакви, добиваме $RE \parallel AQ$.

Значи, четириаголникот $AQER$ е паралелограм. Од $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{AP}$, добиваме $\overline{AP} = \overline{PE}$, т.е. P е средина на дијагоналата AE во паралелограмот $AQER$. Бидејќи дијагоналите во паралелограм се преполовуваат во пресечната точка, добиваме дека P мора да е средина и на другата дијагонала QR , т.е. дека $P \in QR$. Значи, точките P , Q и R се колинеарни. ■





Јуниорска Македонска математичка олимпијада 2019

Машински факултет - Скопје, Република Македонија

26.05.2019

3. Дефинираме боење на рамнината на следниот начин:
- избираме природен број m ,
 - нека K_1, K_2, \dots, K_m се различни кругови со ненулти радиуси такви што $K_i \subset K_j$ или $K_j \subset K_i$ за $i \neq j$,
 - точките од рамнината кои што се надвор од произволен од избраните кругови се различно обоени од точките кои што се внатре во кругот.

Во рамнината се дадени 2019 точки такви што било кои три од нив не се колинеарни. Определи го максималниот број на бои со кои дадените точки можат да се обојат.

Решение. Од условот на задачата следува дека максималниот број бои е помал или еднаков на 2019.

Ќе докажеме дека бројот 2019 бои се достигнува. За таа цел доволно е да докажеме дека постојат $K_1, K_2, \dots, K_{2019}$ кругови кои дефинираат различно боење на точките. Ги повлекуваме сите отсечки кои имаат крајни точки во дадените 2019 точки, кои се вкупно $\frac{2019 \cdot 2018}{2}$. На овие отсечки повлекуваме симетрали. Избираме точка која не лежи на ниту една од повлечените симетрали. Јасно, растојанијата од таа точка до дадените 2019 точки се меѓу себе различни (избраната точка не лежи на било која од симетралите на отсечките) и овие растојанија ги подредуваме во растечки редослед $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{2019}$. Понатаму, наоѓаме броеви $r_i, i = 1, 2, \dots, 2019$ такви што $s_1 < r_1 < s_2 < r_2 < \dots < s_{2019} < r_{2019}$. Конечно, конструираме 2019 концентрични кружници со центар во избраната точка и радиуси $r_i, 1 \leq i \leq 2019$. Јасно, овие кружници дефинираат боење во кое секоја од избраните 2019 точки е различно обоена. ■

коригирана верзија:

4. Нека реалните броеви a, b и c ги задоволуваат равенствата

$$(a+b)(b+c)(c+a) = abc \text{ и } (a^9 + b^9)(b^9 + c^9)(c^9 + a^9) = (abc)^9.$$

Докажи дека барем еден од броевите a, b, c е нула.

Решение. За произволни реални броеви x и y од $x^2 - xy + y^2 \geq xy$ и $x^6 - x^3y^3 + y^6 \geq x^3y^3$, па затоа

$$x^9 + y^9 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6) \geq (x+y)xyx^3y^3 = (x+y)x^4y^4,$$

каде што равенство важи акко $x=y$. Тогаш, од горното неравенство и од условот на задачата следува

$$(abc)^9 = (a^9 + b^9)(b^9 + c^9)(c^9 + a^9) \geq (a+b)(b+c)(c+a)a^4b^4b^4c^4c^4a^4 = a^9b^9c^9.$$

Ако $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ равенство важи кога $a=b=c$. Со замена во равенството $(a+b)(b+c)(c+a) = abc$ добиваме дека $8a^3 = a^3$, односно $a=0$, што претставува контрадикција. Конечно, барем еден од броевите a, b, c е нула. ■



Јуниорска Македонска математичка олимпијада 2019

Машински факултет - Скопје, Република Македонија

26.05.2019

5. Нека p_1, p_2, \dots, p_k се различни прости броеви. Определи го бројот на природни броеви од облик $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ за кои важи $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k = p_1 p_2 \dots p_k$.

Решение. Јасно, од $p_1 p_2 \dots p_k = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$ следува за секој $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ важи $p_i \mid \alpha_s$, за некој $s \in \{1, 2, \dots, k\}$. Имајќи го предвид последното ќе конструираме подредена k -торка $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ природни броеви за која е исполнето равенството $p_1 p_2 \dots p_k = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$. Земаме k -торка $(1, 1, \dots, 1)$. Со бројот p_1 множиме произволен (еден) член на оваа k -торка, што значи дека за p_1 имаме k можности. Понатаму, во добиената k -торка со p_2 множиме произволен (еден) нејзин член, што значи дека за p_2 имаме k можности. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека за секој од простите броеви p_3, \dots, p_k имаме k можности. Според тоа, добиваме дека постојат k^k подредени k -торки $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ за кои важи $p_1 p_2 \dots p_k = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$. Јасно, секоја од овие k -торки определува број од видот $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ и различните подредени k -торки определуваат различни броеви од бараниот вид. Навистина, ако $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (\beta_1, \dots, \beta_k)$, тогаш $\alpha_i \neq \beta_i$ за барем еден $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, па затоа $p_i^{\alpha_i} \neq p_i^{\beta_i}$, од каде следува $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \neq p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$.

Обратно, секој број од видот $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ за кои важи $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k = p_1 p_2 \dots p_k$ определува подредена k -торка $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ природни броеви за која е исполнето равенството $p_1 p_2 \dots p_k = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека бројот на природни броеви од облик $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ за кои важи $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k = p_1 p_2 \dots p_k$ е еднаков на k^k . ■