XLIII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Скопје, 5 мај 2018 година

VI одделение

1. **Определи го најмалиот природен број кој е делив со 225 и во чиј декаден запис се само цифрите 0 и 1.**

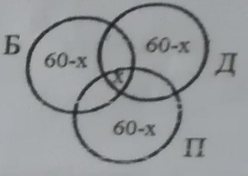
Решение. Од $225 = 9 \cdot 25$ следува дека бараниот број е делив со 9 и со 25. **(6)** Бидејќи цифирите со кои е запишан роејот се само 0 и 1, за да бројот е делив со 25 потребно е да завршува на две нули, а за да биде делив со 9, потребно е збирот на неговите цифри да е делив со 9. **(7)** Се бара најмалиот број, па од деливоста со 9 следува дека во записот на бројот треба да има девет единици. Значи, бараниот број е 11111111100. **(7)**

2. **Бојан, Павел и Даниел решиле 100 задачи, при што секој од нив решил по 60 задачи. Сите задачи ги делиме во точно две групи: „лесни“ и „тешки“. „Лесна“ задача е онаа која ја решиле сите тројца , а „тешка“ задача е онаа која ја решил само еден ученик. Колку има „лесни“ и колку „тешки“ задачи решиле заедно?**

Решение. Нека има x лесни задачи. Тогаш секој од учениците решил $60-x$ тешки задачи. **(5)** Па

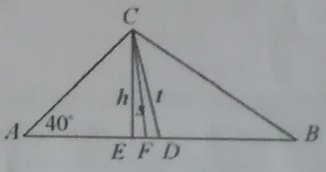
$$3(60-x)+x=100, \text{ (5)}$$

односно $180-3x+x=100$. **(5)** Од овде $x=40$, па лесни се 40 задачи, а тешки 60. **(5)**



3. **Даден е правоаголен триаголник, со агол во темето A еднаков на 40°. Докажи дека симетралата на правиот агол го преполовува аголот кој го формираат висината и тежишната линија повлечени од темето на правиот агол.**

Решение. Нека $\measuredangle CAB = 40^\circ$ и висината, симетралата на правиот агол и тежишната линија ја сечат хипотенузата во точките E, F, D соодветно. Бидејќи $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$ следува дека $\triangle DCA$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle DCA = 40^\circ$. **(5)** Триаголникот BCE е правоаголен, па затоа $\measuredangle BCE = 40^\circ$. **(5)** Бидејќи

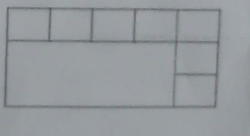


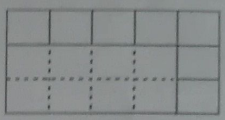
$$\measuredangle BCF = \measuredangle ACF = 45^\circ \Rightarrow \measuredangle ECF = \measuredangle BCE - \measuredangle BCF = 45^\circ - 40^\circ = 5^\circ \text{ (5)}$$

$$\measuredangle DCF = \measuredangle ACD - \measuredangle ACF = 45^\circ - 40^\circ = 5^\circ \text{ (5)}$$

Од каде следува дека CF е симетрала на $\measuredangle ECD$.

4. **Никола требало да предложи модел на знаме за неговиот извиднички одред. Тој одлучил знамето да биде составено од еден правоаголник и 7 складни квадрати како на цртежот десно.. Притоа, решил $\frac{2}{3}$ од знамето да е обоено во една боја, но така што ќе се обоени само цели фигури. Колку различни знамиња може да направи Никола?**





Решение. Знамето да го дополниме до квадратна мрежа како на цртежот десно. Тогаш знамето содржи 15 складни квадрати, односно, правоаголникот е поделен на 8 вакви квадрати. **(5)** При тоа, бидејќи $\frac{2}{3}\cdot 15=10$, според условот на задачата, треба да се обојат 10 вакви квадрати. **(5)** Повторно, заради условот на задачата, може да се бојат само цели фигури, т.е. цели делови од знамето, па бидејќи има 7 мали квадрати, а треба да се обојат вкупно 10, кога би ги обоиле сите мали квадрати, би останало да се обои дел од правоаголникот што не е можно. Затоа, мора да се обои големиот правоаголник. **(5)** Бидејќи тој содржи мрежа од 8 квадрати, треба од дадените 7, да се обојат два квадрати. За избор на првиот квадрат имаме 7 можности, а потоа за избор на вториот квадрат имаме 6 можности. Притоа, секој избран пар квадрати е броен двапати, па затоа два квадрати може да се изберат на $\frac{7\cdot 6}{2}=21$ начин. Значи, Никола може да направи 21 различно знаме. **(5)**

5. **Првите четири члена на една низа се: 2, 0, 1, 8. Секој нареден член на низата е цифрата на единиците на збирот од претходните четири члена. (пр. петтиот член е 1). Дали 2018–тиот член на низата е парен или непарен број? Одоговорот да се образложи!**

Решение. Да ги испишеме првите 20 членови од низата:

2,0,1,8,1,0,0,9,0,9,8,6,3,6,3,8,0,7,8,3. **(6)**

Очигледно е дека првите десет члена се по ред: парен, парен, непарен, парен, непарен, парен, парен, непарен, парен, непарен. **(6)** Потоа наредните десет се во истиот редослед. Бидејќи $2018=201\cdot 10+8$, јасно е дека 2018-тиот член е непарен број. **(8)**

VII одделение

1. **Определи ги цифрите x, y така што бројот $\overline{x74y}$ е делив со 15.**

Решение. Бидејќи бројот $\overline{x74y}$ е делив со 15, тој е делив со 3 и со 5, па затоа y може да биде 0 или 5. **(4)**

Ако $y=0$, тогаш од деливоста со 3 следува дека збирот на цифрите $x+7+4+0=x+11$ е делив со 3, што е можно ако $x=1$ или $x=4$ или $x=7$, па се добиваат броевите 1740, 4740 и 7740. **(8)**

Ако $y=5$, тогаш повторно од деливоста со 3 следува дека збирот на цифрите $x+7+4+5=x+16$ е делив со 3, што е можно ако $x=2$ или $x=5$ или $x=8$, па ги добиваме броевите 2745, 5745 и 8745. **(8)**

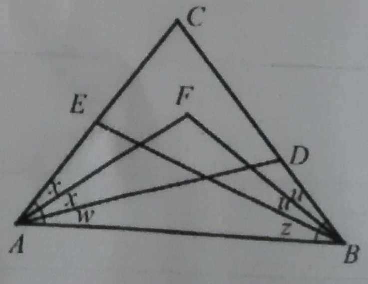
2. **Даден е триаголник ABC. Нека E и D се произволни точки на страните AC и BC, соодветно. Симетралите на $\measuredangle CAD$ и $\measuredangle CBE$ се сечат во точката F. Докажи дека $\measuredangle AEB+\measuredangle ADB=2\measuredangle AFB$.**

Решение. Согласно условите на задачата x, u, z, w ги означиме аглите како на цртежот десно. Тогаш:

$$\measuredangle AFB=180^\circ-(x+w+u+z)$$

$$\measuredangle AEB=180^\circ-(2x+w+z)$$

$$\measuredangle ADB=180^\circ-(2u+z+w)$$



Затоа:

$$\measuredangle AEB + \measuredangle ADB = 360^\circ - (2x + 2u + 2z + 2w)$$

$$2\measuredangle AFB = 360^\circ - (2x + 2w + 2u + 2z)$$

од каде што следува тврдењето на задачата.

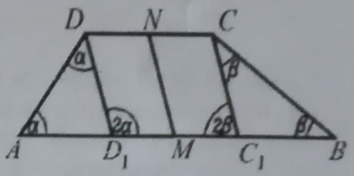
3. **Нека n е природен број запишан со 2018 единици, 2018 двојки и определен број нули. Докажи дека n не е точен квадрат.**

Решение. Збирот на цифрите на дадениот број е $2018(1+2) = 2018 \cdot 3$, **(5)**, од каде следува дека 3 е делител на n **(5)**. Но, $3 \nmid 2018$, што значи дека $9 \nmid n$ **(5)** Според тоа, дадениот број неможе да биде точен квадрат на природен број. **(5)**

4. **Даден е трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB} = a, \overline{CD} = b, a > b$. Нека M и N се средини на основите AB и CD соодветно и $\overline{MN} = \frac{a-b}{2}$. Пресметај го збирот на аглите на поголемата основа.**

Решение. Го конструираме паралелограмот $MNCC_1$ и $MNDD_1$. Тогаш $\overline{DN} = \overline{NC} = \frac{b}{2}$, $\overline{AM} = \overline{MB} = \frac{a}{2}$ и

$$\overline{MN} = \overline{CC_1} = \overline{DD_1} = \frac{a-b}{2}. \text{ (5)}$$



Понатаму,

$$\overline{AD_1} = \overline{AM} - \overline{MD_1} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2} = \overline{BM} - \overline{MC_1} = \overline{BC_1}.$$

(5) Бидејки триаголниците ADD_1 и BCC_1 се рамнокраки, **(5)** следува дека $\measuredangle C_1D_1D = 2\alpha$ и $\measuredangle D_1C_1C = 2\beta$ (надворешниот агол на триаголник е еднаков на збирот на двата несоседни агли). Конечно, од $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ следува $\alpha + \beta = 90^\circ$. **(5)**

Забелешка. Ако ученикот разгледува специјален случај на рамнокрак трапез, тогаш за точно пресметан збир на аглите при основата на трапезот се даваат 5 бода.

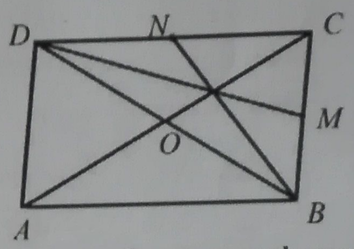
5. **Околу кружна маса се наредени 11 столчиња, а на почетокот седат 10 деца чии столчиња во насока на движењето на стрелките на часовникот се означени со броевите од 1 до 10. Треба да им се приклучи уште Павел. Откако сите ќе седнат околу масата децата играат игра на испаѓање: почнуваат во насока на движењето на стрелките на часовникот да бројат од детето кое седи на столчето означено со бројот 1 и испаѓа тринаесеттото дете. Останатите продолжуваат со играта таму каде што застанало броењето, тринаесеттиот пак испаѓа итн, додека не остане само едно дете. На кое место, односно меѓу кои две деца од десетте кои веќе седеле на масата, треба да седне Павел, за да победи во играта?**

Решение. Кога Павел ќе седне, на масата ќе има 11 деца. Столчињата околу масата ги нумерираме одново во насока на движење на стрелките на часовникот така што столчето кое пред тоа беше означено со бројот 1 повторно го означуваме со бројот 1. **(5)** Почнуваме да броиме како што е опишано во играта и го прецртуваме секој тринаесетти број. Последователно че ги прецртуваме 2, 5, 9, 4, 1, 3, 8, 10, 11, 6, **(5)** а на крајот ќе остане бројот 7, **(5)** што значи дека Павел треба да седне меѓу децата кои седат на столчињата кои првично се означени со броевите 6 и 7. **(5)**

VIII одделение

1. **Определи ја најголемата вредност на природниот број n, така што бројот 39^n е делител на бројот $39!$ Одговорот да се образложи.**
Решение. Имаме $39=3\cdot13$. **(5)** Во бројот $39!$, простиот број 13 се појавува као делител на 13, 26 и 39. **(10)**. **Затоа најголемата бредност на бројот n** е 3. **(5)**

2. **Даден е паралелограм $ABCD$. Нека M и N се средини на страните BC и CD соодветно. Докажи дека правите DM и BN се сечат во точка од дијагоналата AC.**
Решение. Ја повлекуваме дијагоналата BD. Нека дијагоналите се сечат во точка O (цртеж десно). Дијагоналите во паралелограм се преполовуваат. **(10)** Тогаш M, N и O се средини на BC, CD и BD соодветно. Следува DM, BN и CO се тежишни линии во $\triangle BCD$, па затоа се сечат во една точка. Според тоа, правите DM и BN се сечат во точка од дијагоналата AC. **(10)**



3. **Павел во 2018 година ќе наполни онолку години колку што е збирот на цифрите од годината во која е роден. Колку години има Павел?**
Решение. Ако Павел е роден во 20-тиот век, тогаш според условот на задачата, ја добиваме следната равенка:

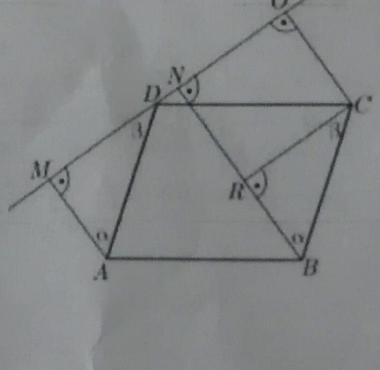
$$2018-\overline{19ab}=1+9+a+b$$
$$2018-1900-10a-b=10+a+b$$
$$11a+2b=108$$

Оваа равенка нема решение такво што a и b се едноцифрени броеви. **(10)**
Ако, пак, Павел е роден во 21-виот век, тогаш ја имаме равенката:

$$2018-\overline{20ab}=2+0+a+b$$
$$2018-2000-10a-b=2+a+b$$
$$11a+2b=16$$

Последната равенка има единствено решение такво што a и b се едноцифрени броеви и тоа $a=0,b=8$, што значи дека Павел е роден во 2008 година и има 10 години. **(10)**

4. **Нека за паралелограмот $ABCD$ и правата p имаат единствена заедничка точка D. Ако M,N,O се подножјата на нормалите повлечени од точките A,B,C на правата p, соодветно, тогаш $\overline{AM}+\overline{OC}=\overline{BN}$. Докажи!**
Решение. Нека R е подножјето на нормалата на BN повлечена од C. Тогаш
$$\measuredangle MAD=\measuredangle RBC \text{ и } \measuredangle MDA=\measuredangle RCB$$
(агли со паралелни краци) и $\overline{AD}=\overline{BC}$, па следува дека $\triangle ADM\cong\triangle BCR$. **(10)** Значи, $\overline{AM}=\overline{BR}$. Јасно, $RCON$ е правоаголник, па $\overline{NR}=\overline{OC}$. **(5)**



Сега имаме $\overline{AM}+\overline{OC}=\overline{BR}+\overline{NR}=\overline{BN}$, што и требаше да се докаже. **(5)**

5. **Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $\underbrace{11...1}_{2018}$ и 1111.**

Решение. Да означиме $a=\underbrace{11...1}_{2018}$ и $b=1111$. Од $2018=4\cdot504+2$, $\underbrace{11...1}_{2018}=\underbrace{11...1}_{2016}00+11$ **(7)** и

$$\underbrace{11...1}_{2016}00=10^2\cdot\underbrace{11...1}_{2016}=10^2\cdot\underbrace{11111111...1111}_{504\text{ пати по }1111}=10^2\cdot1111\cdot\underbrace{1\,0001\,0001...0001\,0001}_{504\text{ пати бројот }1},$$
$$=10^2\cdot1111\cdot(1+10^4+10^8+...+10^{2012})$$

добиваме $a=bq+11$ за q природен број. **(7)** Јасно е дека секој заеднички делител на a и b е делител 11, што значи дека најголемиот заеднички делител на a и b е делител на $\mathrm{NZD}(a,b)$. Бројот 11 е прост па единствени опции за $\mathrm{NZD}(a,b)=1$ или 11. Јасно, 11 е делител на a и b па затоа $\mathrm{NZD}(a,b)=11$. **(6)**

IX одделение

1. **Ако x,y се природни броеви за кои важи $x-y-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0$, пресметај ја вредноста на изразот $(\frac{x}{y})^{2018}+(\frac{y}{x})^{2018}$.**

Решение. Прв начин. Ако даденото равенство го помножиме со xy добиваме $x^2y+x=xy^2+y$, т.е. $x(xy+1)=y(xy+1)$. **(9)** Бидејќи броевите се природни следува дека $xy+1\neq0$. Значи, $x=y$. **(9)** Според тоа $(\frac{x}{y})^{2018}+(\frac{y}{x})^{2018}=2$. **(2)**

Втор начин. Дадено равенство е еквивалентно на равенството $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{x}$, т.е. на равенството $\frac{xy+1}{y}=\frac{xy+1}{x}$. **(9)** Бидејќи броевите се природни следува дека $xy+1\neq0$. Значи, $\frac{1}{y}=\frac{1}{x}$, односно $x=y$. **(9)** Според тоа $(\frac{x}{y})^{2018}+(\frac{y}{x})^{2018}=2$. **(2)**

Трет начин. Даденото равенство е еквивалентно на равенството $(x-y)+\frac{x-y}{xy}=0$, т.е. на равенството $(x-y)\frac{xy+1}{xy}=0$. **(9)** Бидејќи броевите се природни следува дека $xy+1\neq0$. Значи, $x=y$. **(9)** Според тоа $(\frac{x}{y})^{2018}+(\frac{y}{x})^{2018}=2$. **(2)**

2. **Збирот на дијагоналите на еден ромб е еднаков на $8\,cm$, а неговата плоштина е еднаква на $7\,cm^2$. Определи го периметарот на ромбот?**

Решение. Нека a е должината на страната, а d_1 и d_2 се должините на дијагоналите на ромбот. Од $d_1+d_2=8$ и $\frac{d_1\cdot d_2}{2}=7$, **(4)** следува

$$64=(d_1+d_2)^2=d_1^2+d_2^2+2d_1d_2=d_1^2+d_2^2+28,$$

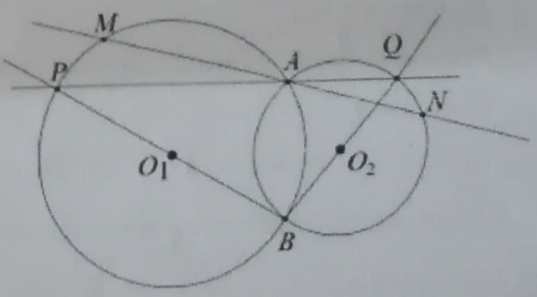
односно $d_1^2+d_2^2=36$. **(8)** Значи, $a^2=\frac{d_1^2+d_2^2}{4}=\frac{36}{4}=9$, односно $a=3$. Значи, периметарот на ромбот е $L=4a=12cm$. **(8)**

3. **На првенство во фудбал во едно училиште учествуваат 8 екипи. Секоја екипа игра само по еден натпревар со секоја од останатите екипи. Докажи дека во секој момент за време на првенството, постојат барем две екипи кои дотогаш одиграле еднаков број на натпревари.**

Решение. Ако секоја екипа одиграла некој натпревар, тогаш секоја од екипите одиграла 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 7 натпревари. Бидејќи имаме седум можности, а осум екипи, според принципот на Дирихле, следува дека има барем две екипи кои одиграле еднаков број на натпревари. **(10)**

Ако во некој момент има некоја екипа (барем една) која сè уште не одиграла ниту еден натпревар, тогаш сигурно не постои екипа која ги одиграла сите натпревари. Јасно, во тој момент секоја од екипите можела да одигра: 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6 натпревари. Бидејќи имаме осум екипи, а седум можности повторно според принципот на Дирихле, две екипи одиграле еднаков број на натпревари. **(10)**

4. **Две кружници со центри O_1 и O_2 имаат две заеднички точки A и B. Права низ точката A, ги сече двете кружници во точките M и N. Докажи дека $\measuredangle O_1MB=\measuredangle O_2NB$.**



Решение. Ги повлекуваме правите BO_1 и BO_2. Бидејќи аглите PAB и QAB се прави, следува дека точките P,Q и A се колинеарни. **(4)** Значи $\measuredangle PAM=\measuredangle QAN$ како накрсни агли. Од друга страна $\measuredangle MBP=\measuredangle MAP$ (како агли над ист кружен лак MP) и $\measuredangle NBQ=\measuredangle NAQ$ (како агли над ист кружен лак NQ). Така $\measuredangle MBP=\measuredangle NBQ$. **(8)**

Бидејќи триаголниците O_1MB и O_2NB се рамнокраки, добиваме дека $\measuredangle O_1MB=\measuredangle O_1BM$ и $\measuredangle O_2NB=\measuredangle O_2BN$. Конечно $\measuredangle O_1MB=\measuredangle O_2NB$. **(8)**

5. **За целите броеви x,y е исполнето $90\mid x^2+xy+y^2$. Докажи дека $900\mid xy$.**

Решение. Од условот $90\mid x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy$ добиваме дека $3\mid(x-y)^2$, па затоа $9\mid(x-y)^2$. **(2)** Од истиот услов следува дека $3\mid xy$ односно барем еден од броевите x и y е делив со 3. Меѓутоа, $3\mid x-y$ односно x и y имаат ист остаток при делење со 3, од што следува дека и двата мора да се деливи со 3. **(1)**

Ќе докажеме $100\mid xy$. Од условот $90\mid x^2+xy+y^2$ и од $x^2+xy+y^2\mid x^3-y^3$ следува дека $10\mid x^3-y^3$. **(2)** Остатоци при делење со 10 се 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Со директна проверка добиваме дека остатоци при делење на кубот од природен број со10 се 0, 1,2 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9, соодветно. **(3)** Следува дека кубовите на два броја имаат ист остаток при делење со 10 ако и само ако двата броја имаат ист остаток при делење со 10. Добиваме $10 \mid x-y$. Сега од $10 \mid x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy$ добиваме $10 \mid xy$ па затоа барем еден од броевите е делив со 10. **(1)** Од $10 \mid x-y$ добиваме дека $100 \mid xy$. Конечно од $9 \mid xy$ и $100 \mid xy$ следува тврдењето на задачата. **(1)**