# XLII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

**Охрид, 6 мај 2017 година**

## 6 одделение

**1.** Определи ги цифрите $a,b$ така што збирот $\overline{323a}+\overline{b410}$ да биде делив со 9?

**Решение.** Собирајќи ги броевите, може да забележиме дека добиениот збир ќе има 4 или 5 цифри. Ако збирот е четирицифрен, вредност на $b$ е најмногу 6, а цифрите се: прва $3+b$, втора 6, трета 4, четврта $a$. За збирот да е делив со 9 треба $3+b+6+4+a=13+a+b$ да е број делив со 9, при што $b$ е најмногу 6. Можни се повеќе случаи:

- $b=6$, збирот е $19+a$, па $a=8$
- $b=5$, збирот е $18+a$, па $a=0$ или $a=9$
- $b=4$, збирот е $17+a$, па $a=1$
- $b=3$, збирот е $16+a$, па $a=2$
- $b=2$, збирот е $15+a$, па $a=3$
- $b=1$, збирот е $14+a$, па $a=4$

Во случај збирот да е петцифрен број, цифрите се петта $a$, четврта 4, трета 6, втора $b+3-10$ и прва 1. Збирот на цифрите е $a+4+6+b+3-10+1=a+b+4$ каде $b$ прима вредности 7, 8 и 9. Можни се следниве случаи:

- $b=7$, збирот е $11+a$, па $a=7$
- $b=8$, збирот е $12+a$, па $a=6$
- $b=9$, збирот е $13+a$, па $a=5$.

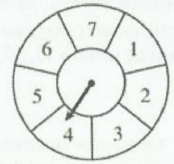
**2.** Дадени се два броја, чиј збир е 4500. Ако првиот број се зголеми четири пати, а вториот двапати, тогаш збирот на така добиените броеви е 11480. Определи ги дадените броеви?

**Решение.** Ако и двата броја се зголемат двапати, и нивниот збир исто се зголемува двапати и изнесува 9000. Тогаш кога првиот број ќе се зголеми двапати се добива бројот $11480-9000=2480$, значи првиот баран број е $2480:2=1240$, а вториот $4500-1240=3260$.

**3.** Во едно училиште во петто оделение учат 140 ученици. Во шесто одделение учат 5% помалку ученици отколку во петто одделение. Вкупниот број ученици кои учат во петто и шесто одделение е еднаков на 91% од вкупниот број ученици кои учат во шесто и седмо одделение и овој број е еднаков на 26% од бројот на сите ученици кои учат во ова училиштето. Колку ученици учат во седмо одделени? Колку ученици учат во ова училиште?

**Решение.** Во шестите одделенија има 95% од бројот на учениците во петтите одделенија, односно има $0,95\cdot 140=133$ ученици. Во петтите и шестите има заедно $140+133=273$ ученици. Ова е 91% од бројот на ученици во шестите и седмите одделенија заедно, па $273=0,91\cdot x$, каде $x$ е бројот на ученици во шестите и седмите одделенија заедно и изнесува $x=\frac{273\cdot 100}{91}=300$ ученици. Сега, само во седмите одделенија има $300-133=167$ ученици. Од последниот услов, 273 да е 26% од вкупниот број на ученици, добиваме дека бројот на ученици во училиштето е $\frac{273\cdot 100}{26}=1050$.

**4.** Во играта "часовник", на почетокот стрелката покажува еден од броевите од 1 до 7 (цртеж десно). Во секој чекор, стрелката се поместува во насока на движењето на стрелките на часовникот за толку полиња колку што е бројот запишан во полето пред почетокот на чекорот. На пример, на цртежот стрелката покажува на бројот 4, што значи дека таа треба да се помести за 4 полиња и ќе покажува на полето со бројот 1, па во следниот чекор се поместува за 1 поле и ќе покажува на полето во кое е запишан бројот 2 итн. После одиграни 21 потег стрелата покажува на полето во кое е запишан бројот 6. На кое поле покажувала стрелката после првиот одигран потег?




**Решение:** Почнуваме со правење на табела во која ќе ја одлучиме позицијата после следното вртење во било која сегашна позиција.

| Сегашна позиција | Наредна позиција |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| 4 | 1 |
| 5 | 3 |
| 6 | 5 |
| 7 | 7 |

Значи за стрелката да посочува кон 6 после 21 вото вртење, мора да посочувала кон 3 после 20 тото вртење, мора да посочувала 5 после 19 тото вртење, на 6 после 18 тото вртење. Оваа шема продолжува,па заклучуваме стрелката посочувала 6 после 15тото вртење, 12тото вртење, 9тото вртење, 6тото вртење и 3тото вртење. Бидејќи покажува на 6 после 3тотот вртење, покажувала на 3 после 2рото вртење и 5 после 1вото вртење.

**5.** Во секоја од 7 штали е сместен непарен број коњи и тоа така да броевите на коњите во шталите формираат низа од последователни непарни природни броеви. Во секоја штала се сместени помалку од 77 коњи. Вкупниот број на коњи во сите 7 штали е запишан со цифри чиј збир е 7. Колку коњи има во секоја од шталите?

**Решение.** Збир на 7 непарни броеви е повторно непарен број. Вкупниот број на коњи има збир на цифри 7, па збирот може да завршува само на цифрите 1, 3 или 5 (ако завршува на

7 или 9, збирот на цифрите е поголем од 7). Најмалиот можен збир на седум последователни непарни броја е 1+3+5+7+9+11+13=49, со збир на цифри кој не е 7. Најголемиот можен збир на седум последователни непарни броеви помали од 77 е 75+73+71+69+67+65+63=483 (исто не задоволува). Сега, трицифрени броеви со збир на цифри 7, поголеми од 49, а помали од 483, со последна цифра 1, 3 или 5 се 115, 205, 133, 223, 313, 403, 151, 241, 331, 421. Да забележиме дека збирот на седум последователни непарни броеви е делив со 7, имено за $a$ непарен број, збирот на седум последователни непарни броеви може да се запише во облик: $a+(a+2)+(a+4)+(a+6)+(a+8)+(a+10)+(a+12)=7a+42=7(a+6)$. Од збировите наведени погоре, делив со 7 е само бројот 133. Тогаш, $7(a+6)=133$, $a+6=19$, $a=13$. Значи првиот број во бараната низа е 13, а во шталите редоследно, бројот на коњите е даден со низата 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25.

# 7 одделение

**1.** Определи ги сите трицифрени броеви помали од 550 такви што цифрата на стотките е еднаква на производот на другите две цифри.

**Решение.** Нека $\overline{abc}$ е бараниот број. Бидејќи $\overline{abc}<550$, следува дека $a\in\{1,2,3,4,5\}$.

Ако $a=1$, тогаш $b\cdot c=1$, од каде се добива дека $b=1$ и $c=1$ т.е. бараниот број е $111$.

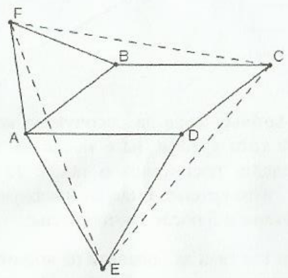
Ако $a=2=1\cdot 2=2\cdot 1$, тогаш се добиваат броевите $212$ и $221$.

Ако $a=3=1\cdot 3=3\cdot 1$, тогаш бараните броеви се $313$ и $331$.

Ако $a=4=1\cdot 4=4\cdot 1=2\cdot 2$, тогаш бараните броеви се $414, 422$ и $441$.

Ако $a=5=1\cdot 5=5\cdot 1$, тогаш бараните броеви се $515$ и $551$. Бидејќи трицифрените броеви треба да се помали од 550, бројот $551$ се отфрла.

**2.** Даден е паралелограм $ABCD$. Над страните $AB$ и $AD$, надвор од паралелограмот $ABCD$, се конструирани рамнострани триаголници $ABF$ и $DAE$. Докажи, дека триаголникот $ECF$ е рамностран.




<u>**Решение:**</u> Ќе покажеме дека триаголниците $\Delta AFE\cong\Delta BFC\cong\Delta DCE$, од каде следува дека $\overline{FE}=\overline{FC}=\overline{CE}$.

Бидејќи $\overline{AB}=\overline{DC}$ како спротивни страни во паралелограм, и $\overline{AB}=\overline{AF}=\overline{BF}$ како страни на рамностран триаголник добиваме $\overline{DC}=\overline{AF}=\overline{BF}$.

На сличен начин, $\overline{AE}=\overline{DE}=\overline{BC}$.

Како спротивни агли во паралелограм, $\angle ADC\cong\angle ABC$.

$$\begin{aligned}\angle EDC &= 360° - \angle ADE - \angle ADC\\ &= 360° - \angle ABF - \angle ABC\\ &= \angle FBC\end{aligned}$$

Како соседни агли во паралелограм, $\angle BAD = 180° - \angle ADC$.

Сојуз на математичари на МАКЕДОНИЈА

$$\begin{aligned}\angle FAE = \angle FAB + \angle BAD + \angle DAE &= 120° + \angle BAD = 120° + 180° - \angle ADC\\ &= 300° - \angle ADC = \angle EDC\end{aligned}$$

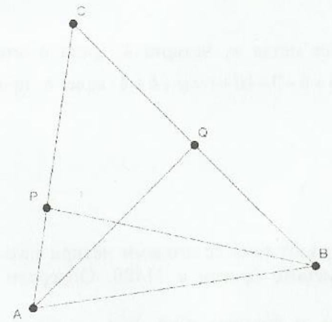
Тогаш $\Delta AFE\cong\Delta BFC\cong DCE$ според признакот за складност на триаголници САС, од каде следува доказот.

**3.** Даден е $\Delta ABC$. Точките $P$ и $Q$ лежат на страните $AC$ и $BC$, соодветно и се такви што периметарот на $\Delta ABP$ е еднаков со периметарот на $\Delta ABQ$, а периметарот на $\Delta AQC$ е еднаков со периметарот на $\Delta PBC$. Докажи, дека $\Delta ABC$ е рамнокрак.

**Решение.** Имаме

$$\begin{aligned}L_{\Delta ABQ}+L_{\Delta AQC} &= \overline{AB}+\overline{BQ}+\overline{AQ}+\overline{AQ}+\overline{QC}+\overline{AC}=\\ &=\overline{AB}+\left(\overline{BQ}+\overline{QC}\right)+2\overline{AQ}+\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}+2\overline{AQ}+\overline{AC}= \text{ и}\\ &=L_{\Delta ABC}+2\overline{AQ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{\Delta ABP}+L_{\Delta PBC} &= \overline{AB}+\overline{BP}+\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{BC}+\overline{PC}=\\ &=\overline{AB}+\left(\overline{AP}+\overline{PC}\right)+2\overline{BP}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{AC}+2\overline{BP}+\overline{BC}=\\ &=L_{\Delta ABC}+2\overline{BP}\end{aligned}$$




Бидејќи $L_{\Delta ABP}=L_{\Delta ABQ}$ и $L_{\Delta AQC}=L_{\Delta PBC}$ имаме дека мора $\overline{AQ}=\overline{BP}$.

Од тоа што

$\overline{AP}=L_{\Delta ABP}-\overline{BP}-\overline{AB}=L_{\Delta ABQ}-\overline{AQ}-\overline{AB}=\overline{BQ}$

, заклучуваме дека триаголниците $ABP$ и $ABQ$ имаат една заедничка страна и $\overline{AQ}=\overline{BP}$, $\overline{AP}=\overline{BQ}$, следува дека тие се складни.

Значи $\measuredangle CAB=\measuredangle PAB=\measuredangle QBA=\measuredangle CBA$, па $\Delta ABC$ е рамнокрак со краци $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$.

**4.** Природен број $n$ при делење со 3 дава остаток $a$, при делење со 6 дава остаток $b$ и при делење со 9 дава остаток $c$. Познато е дека $a+b+c=15$. Определи го остатокот при делење на бројот $n$ со 18.

**Решение.** Бројот $n$ може да се запише во облик $n=3p+a$, $n=6q+b$, $n=9r+c$, при што имајќи предвид дека $a,b,c$ се остатоци при делењето на $n$ со $3,6,9$, соодветно, па $0\le a\le 2$, $0\le b\le 5$, $0\le c\le 8$ и $a+b+c=15$. Но, бидејќи $a+b+c=15$, мора $a=2$, $b=5$, $c=8$. Сега, $n+1=3p+3=6q+6=9r+9$. Тоа значи дека $n+1$ е делива со , $3,6,9$, од каде добиваме дека $n+1$ е деливо со $18$. Следствено, бројот $n$ при делење со $18$ има остаток $17$.

**5.** На кружница, во произволен редослед се запишани броевите 50, 100, 150, ..., 1500. Докажи, дека меѓу запишаните броеви постојат три последователни броја чиј збир е поголем или еднаков на 2350.

**Решение.** Збировите од секои три последователни броја да ги означиме со $S_1, S_2,\dots, S_{30}$. Во збирот $S_1+S_2+\dots+S_{30}$ секој од броевите 50, 100, 150, ..., 1500 е се јавува точно трипати, па затоа

$$S_1+S_2+\dots+S_{30}=3\cdot(50+100+\dots+1500)=$$
$$=150\cdot(1+2+\dots+30)=150\cdot\frac{30\cdot 31}{2}=69750.$$

Ако секој од броевите $S_1, S_2,\dots, S_{30}$ е помал помал од 2350, тогаш секој би бил помал или еднаков од 2300 (бидејќи мора да е делив со 50), па би имале

$$S_1+S_2+\dots+S_{30}\le 30\cdot 2300=69000<69750,$$

што е контрадикција. Според тоа постои $1\le k\le 30$, таков што $S_k\ge 2350$.

# 8 одделение

**1.** Должините на страните на еден правоаголен триаголник се изразени со природни броеви. Дали е можно должините на катетите да бидат изразени со непарни броеви? (Одговорот да се образложи)

**Решение.** Нека $a=2p+1$ и $b=2s+1$, $p,s\in N$ се катети на правоаголниот триаголник. Тогаш, за хипотенузата имаме

$$c^2=a^2+b^2=(2p+1)^2+(2s+1)^2=$$
$$=4p^2+4p+1+4s^2+4s+1=$$
$$=4(p^2+p+s^2+s)+2$$

Се добива дека $2\,|\,c^2$, односно $2\,|\,c$ т.е $c=2x$ . Тогаш

$$(2x)^2=4(p^2+p+s^2+s)+2$$
$$2x^2=2(p^2+p+s^2+s)+1.$$

Последното не е можно, бидејќи на левата страна има парен а на десната непарен број. Според тоа, должините на катетите не може да бидат непарни броеви.

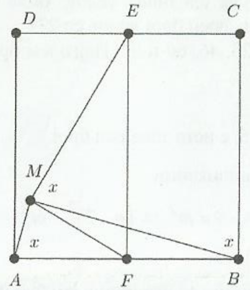
**2.** Нека $\overline{xyy}$ е трицифрен број делив со 7. Докажи дека збирот на цифрите на бројот $\overline{xyy}$ е делив со 7.

**Решение.** Го запишуваме бројот $\overline{xyy}$ во обликот $\overline{xyy}=100x+10y+y=7(14x+y)+2(x+2y)$, каде $x,y$ се цифри. Бидејќи $\overline{xyy}$ е делив со 7, тогаш $7\,|\,2(x+2y)$, односно $7\,|\,x+2y$, што и требаше да се докаже.

**3.** Двајца велосипедисти почнуваат тренинг истовремено. Едниот тргнува од Скопје а другиот од Гевгелија еден кон друг. Кога се на растојание од 180 *km* еден од друг, во тренингот се вклучува една мува. Таа стартува од рамото на едниот велосипедист и лета да го сретне другиот. Застанува на неговото рамо и се веднаш се враќа назад кон првиот велосипедист. Ова го повторува се додека двајцата велосипедисти не се сретнат. Мувата лета со брзина од 30 *km* на час, а велосипедистите се движат со брзина 15 *km* на час. Колку километри ќе прелета мувата за време на тренингот?

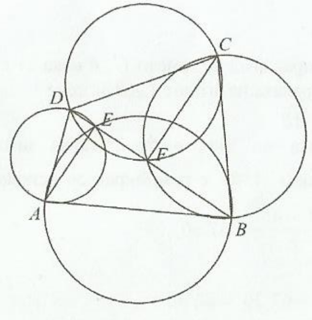
**Решение.** Од моментот кога мувата се приклучува во тренингот до моментот кога велосипедистите ќе се сретнат ќе поминат 6h ($180km/2\cdot 15\frac{km}{h}=6h$). Значи мувата ќе лета 6h, односно таа ќе прелета $6\cdot 30km=180km$.

**4.** Нека $E$ е средина на страната $CD$ на квадратот $ABCD$. Точка $M$ во внатрешноста на квадратот е таква што $\angle MAB=\angle MBC=\angle BME=x$. Определи го $x$?




**Решение.** Го означуваме $\angle ABM$ со $y$. Бидејќи $\angle ABC=x+y=90^0$, од триаголникот $ABM$ добиваме дека $\angle AMB=90^0$. Нека $F$ е средина на $AB$. Тогаш од правоаголниот триаголник $ABM$ добиваме $AF=FB=MF$. Исто така $\angle FMB=\angle FBM=y$ од каде $\angle EMF=x+y=90^0$. Триаголникот $MFE$ е правоаголен при што $EF=2MF$ од каде следува $\angle MFE=60^0$ и $\angle MBF=\frac{1}{2}\angle MFA=\frac{1}{2}(90^0-\angle MFE)=15^0$. Конечно $x=75^0$.

**5.** Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Докажи, дека било која точка од четириаголникот $ABCD$ и неговата внатрешност лежи барем во еден од четирите кругови чии дијаметри се страните на тој четириагоник.




**Решение.** Нека точките $E$ и $F$ се подножја на висините спуштени од темињата $A$ и $C$ кон страната $\overline{BD}$, соодветно. На овој начин со помош на дијагоналата $\overline{BD}$ и точките $E$ и $F$, четириаголниот $ABCD$ е поделен на четири правоаголни триаголници.

Според Талесовата теорема точката $E$ лежи на кружницата со дијаметар $\overline{AB}$. Следува секоја точка од триаголникот $ABE$ лежи во кругот со дијаметар $\overline{AB}$. Аналогно, останатите три правоаголници триаголници лежат во круговите со дијаметри $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$.

Следува секоја точка од четириаголникот $ABCD$, лежи во барем еден четирите кругови, чии дијаметри се страните на тој четириаголник.

# 9 одделение

**1.** Определи ги сите парови последователни природни броеви такви што едниот број може да се запише како производ $2(n-3)(n+1)$, а другиот како производ $(n-2)(2n-1)$ каде што $n$ е природен број.

**Решение:** Разликата на два последователни природни броеви е 1, па во зависност од тоа кој број е поголем имаме два случаи:

1. $2(n-3)(n+1)-(n-2)(2n-1)=1$ од каде што $n=9$, а бараните броеви се 119 и 120.
2. $(n-2)(2n-1)-2(n-3)(n+1)=1$ од каде што $n=7$, а бараните броеви се 64 и 65.

**2.** Кој е најголемиот природен број кој го задоволува следниот услов: било кои две соседни цифри во истиот редослед формираат двоцифрен број делив со 23?

**Решение.** Двоцифрени броеви кои се деливи со 23 се 23, 46, 69 и 92. Најголем број кој го задоволува условот на задачата е 46923.

**3.** Определи ги сите цели броеви $n$ за кои $\sqrt{n^2+4n-5}$ е исто така цел број.

**Решение.** Нека $\sqrt{n^2+4n-5}=m$. Ги имаме следниве импликации:

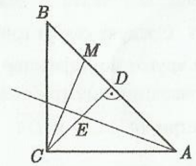
$$\sqrt{n^2+4n-5}=m \Rightarrow n^2+4n-5=m^2 \Rightarrow n^2+4n+4-9=m^2 \Rightarrow (n+2)^2-m^2=9$$
$$\Rightarrow (n+2+m)(n+2-m)=9.$$

Двата множители на левата страна во последното равенство се непарни цели броеви. Бидејќи $m\geq 0$, ги имаме следните можности

$$\begin{cases} n+2+m=9 \\ n+2-m=1 \end{cases}, \begin{cases} n+2+m=3 \\ n+2-m=3 \end{cases}, \begin{cases} n+2+m=-3 \\ n+2-m=-3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} n+2+m=-1 \\ n+2-m=-9 \end{cases}.$$

Оттука лесно наоѓаме дека $n=3, n=1, n=-5, n=-7$.

**4.** Нека $ABC$ е рамнокрак правоаголен триаголник со прав агол во темето $C$, и нека $D$ е подножјето на висината повлечена од $C$. Ако симетралата на аголот $CAB$ ја сече висината $CD$ во точката $E$, докажи дека $\overline{BC}+\overline{CE}=\overline{AB}$.




**Решение.** Нека $M$ е точка од хипотенузата таква што $\overline{AC}=\overline{AM}$. Тогаш триаголникот $AMC$ е рамнокрак со основа $CM$ и $\measuredangle ACM=\measuredangle AMC=\frac{180^\circ-45^\circ}{2}=67^\circ30'$, па следува дека $\measuredangle BCM=90^\circ-67^\circ30'=22^\circ30'$.

Заради $\measuredangle CAE=\measuredangle BCM=22^\circ30'$, $\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\measuredangle ACE=\measuredangle CBM=45^\circ$, следува дека триаголниците $CAE$ и $BCM$ се складни.

Сојуз на математичари на МАКЕДОНИЈА

Значи, $\overline{BM}=\overline{CE}$, па добиваме дека $\overline{AB}=\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AC}+\overline{CE}$.

**5.** За различните реални броеви $a,b,c$ важи

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}=2.$$

Пресметај

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}.$$

**Решение.** Воведуваме смена $x=\frac{a}{b-c}, y=\frac{b}{c-a}, z=\frac{c}{a-b}$. Тогаш условот е од облик $x^2+y^2+z^2=2$, а збирот кој се бара е $x+y+z$. Да забележиме дека

$$x+1=\frac{a+b-c}{b-c}, y+1=\frac{b+c-a}{c-a}, z+1=\frac{c+a-b}{a-b}, \text{ и}$$
$$x-1=\frac{a+c-b}{b-c}, y-1=\frac{b+a-c}{c-a}, z-1=\frac{c+b-a}{a-b}$$

од каде $(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1)$. Последното равенство е еквивалентно со равенството $xy+yz+zx=-1$. Тогаш $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=2-2=0$ од каде $x+y+z=0$.