21-ва ЈММО

21-ва Јуниорска македонска математичка олимпијада, ЈММО 2017

Машински факултет-Скопје
03.06.2017 година

1. Нека p е прост број и нека $3p+10$ е збир на квадратите на 6 последователни природни броеви. Докажи дека $36|p-7$.

2. Нека е даден ΔABC и нека AA_1, BB_1 и CC_1 се тежишни линии во триаголникот кои се сечат во точка T и притоа важи $\overline{BA_1}=\overline{A_1T}$. На продолжението на CC_1 избираме точка C_2 таква што $\overline{C_1C_2}=\frac{\overline{CC_1}}{3}$, а на продолжението на BB_1 избираме точка B_2 таква што $\overline{B_1B_2}=\frac{\overline{BB_1}}{3}$. Докажи дека четириаголникот TB_2AC_2 е правоаголник.

3. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz=1$. Докажи дека

$$\frac{x^2+y^2+z}{x^2+2}+\frac{y^2+z^2+x}{y^2+2}+\frac{z^2+x^2+y}{z^2+2}\geq 3.$$

Кога важи знак за равенство?

4. Даден е ΔABC. На лакот $\overset{\frown}{BC}$ на опишаната кружница околу ΔABC, кој не ја содржи точката A, земени се точки X и Y такви што $\angle BAX=\angle CAY$. Нека M е средината на тетивата AX. Докажи дека $\overline{BM}+\overline{CM}>\overline{AY}$.

5. Најди ги сите природни броеви n такви што n има цифри колку што има различни прости делители и збирот на различните прости делители е еднаков со збирот на степените на истите делители.

Време за работа 4 часа и 30 минути.
За секоја точно решена задача се добиваат 8 поени.