20-та ЈММО

20-та Јуниорска македонска математичка олимпијада

ФОН универзитет-Скопје

28.05.2016година

1.Во множеството цели броеви, реши ја равенката

$$x_1^4+x_2^4+\dots+x_{14}^4=2016^3-1.$$

2. Нека $ABCD$ е паралелограм и нека E,F,G и H се средини на страните AB,BC,CD и DA, соодветно. Ако $BH\cap AC=I$, $BD\cap EC=J$, $AC\cap DF=K$ и $AG\cap BD=L$, тогаш докажи дека четириаголникот $IJKL$ е паралелограм.

3. Даден е квадрат со димензии 4×4, составен од 16 квадрати со страна 1. Во секој квадрат со димензии 1×1 од квадратот се внесени ненегативни цели броеви така што збирот на било кои пет од нив кои може да се прекријат со фигурите на сликата (фигурите може да се поместуваат и превртуваат) изнесува 5. Колку најмногу различни броеви можат да се употребат за пополнување на квадратот?

4. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2+2z^2}}+\sqrt{\frac{yz}{y^2+z^2+2x^2}}+\sqrt{\frac{zx}{z^2+x^2+2y^2}}\le\frac{3}{2}.$$

Кога важи равенство?

5. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x+y^2+(НЗД(x,y))^2=xy\cdot НЗД(x,y).$$