IV одделение

1. (Нумерус, 3151.) Напиши ги сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4.

Решение. Трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4 се: 400, 310, 301, 130, 103, 220, 202, 211, 121 и 112. ***(По 2 поени** за секој наведен трицифрен број.)*

2. (Нумерус, 3148.) Во три камиони се натоварени 195 кутии, така што во секој камион има ист број кутии. Работниците растовариле еден камион. Уште колку кутии останале за растоварање?

Решение. Во секој камион има по 195:3=65 кутии. **(10)** Работниците растовариле еден камион, односно 65 кутии, па им останале уште 195-65=130 кутии за растоварање. **(10)**

3. На една табла Зоран и Петар запишале два броја.

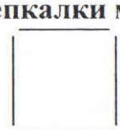
Зоран запишал трицифрен број кој има цифра на единици 1, цифра на десетки за 3 пати поголема од цифрата на единиците и цифра на стотки за 3 поголема од цифрата на единиците.

Петар запишал број кој е претходник на најголемиот непарен број од првата десетка на втората стотка.

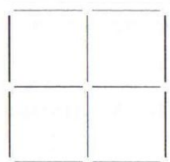
Сања ги собрала запишаните броеви, а потоа збирот го намалила за нивната разлика. Кој број го добила Сања?

Решение: Зоран го запишал бројот 431. **(5)** Петар го запишал бројот 108. **(5)** А Сања пресметала вака: (431+108)-(431-108)=359-323=216. **(10)**

4. Од четири чепкалки може да се направи едно квадратче, како на сликата.



Од 12 чепкалки може да се направи поголем квадрат 2x2, составен од 4 мали квадратчиња, како на сликата.



Колку чепкалки се потребни за да се направи квадрат 10x10, составен од 100 мали квадратчиња?

Решение: Прв начин: Надворешната граница на квадратот ќе биде составена од $4\cdot 10=40$ чепкалки. **(5)** За секоја од внатрешната разделна линија е потребно по 10 чепкалки. **(5)** Бројот на разделни линии е $2\cdot 9=18$ (9 хоризонтални и 9 вертикални). **(5)** Следува, $40+18\cdot 10=220$ чепкалки. **(5)**

Втор начин: Да го нацрта цртежот и да ги изброи чепкалките. **(цртеж 10, одговор 10)**

5. Кога го прашале Павел колку години има секој член на неговото семејство, тој одговорил: „ Јас и бато сме родени на ист ден во иста година и заедно имаме онолку години колку што има месеци во една година. Јас, бато и тато заедно имаме 40 години, мама има ист број на години како тато, а мама и баба заедно имаат 83 години. Баба, тато и дедо заедно имаат 139 години." Пресметај колку години има секој од членовите на семејството на Павел.

Решение: Павел и брат му се близнаци и заедно имаат 12 години, значи секој има по 6 години. **(5)** Тие заедно со татко им имаат 40 години, значи таткото на Павел има 40-12=28 години, исто како и мајката на Павел. **(5)** Таа заедно со бабата на Павел имаат 83 години, значи бабата има 83-28=55 години. **(5)** Од последниот услов, за дедото на Павел добиваме дека има 139-(55+28)=56 години. **(5)**

V одделение

1. (Нумерус 121.) На Милка и требаат 14 минути за да прочита една страна од книга. Вчера во 15:40 h почнала да чита расказ напишан на 10 страници од книгата. Во текот на читањето направила пауза за одмор која траела 15 минути. Во колку часот Милка завршила со читањето на расказот?

Решение. За да прочита 10 страници од книгата на Милка и биле потребни $10 \cdot 14 = 140$ минути. **(5)** Вкупното време за читање и одмор изнесува $140 + 15 = 155$ минути. **(5)** 155 минути се 2 саати и 35 минути. **(5)** Милка со читањето завршила 18:15 h. **(5)**

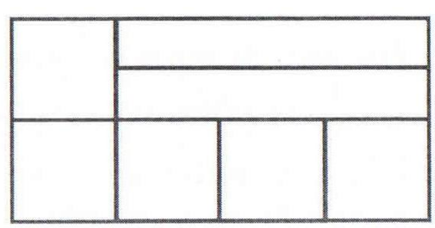
2. (Нумерус 3129.) Во 4-б одделение имало 24 ученици. Секој ученик може да избира дали ќе ги изучува предметите информатика и германски јазик. 15 ученици учат информатика, 12 учат германски јазик, а 8 ученици не учат ниту информатика, ниту германски јазик. Колку ученици од 4-б одделение учат и информатика и германски јазик?

Решение. Од 24 ученици во одделението, 8 не одат ниту на информатика ниту на германски јазик. Значи, $24 - 8 = 16$ ученици избрале барем еден предмет. **(10)**
Бидејќи 15 учат информатика, а 12 германски јазик, што е вкупно $15 + 12 = 27$, добиваме дека $27 - 16 = 11$ ученици ги учат и двата предмети. **(10)**

3. На две полици има вкупно 85 книги. Ако од првата полица се преместат 7 книги на втората полица, тогаш на втората полица ќе има четири пати повеќе книги отколку на првата полица. Колку книги имало на секоја од полиците пред преместувањето на книгите.

Решение. Да забележиме дека и пред и по поместувањето зборот на книгите на две полици е ист. По преместувањето, на втората полица ќе има четири пати повеќе книги отколку на првата полица, што значи дека на втората полица има $85 : 5 = 17$ книги, а на првата полица, $4 \cdot 17 = 68$ книги. **(10)** Пред преместувањето на 7-те книги, на првата полица имало 68+7=75, а на втората полица 17-7=10 книги. **(10)**

4. Пресметај го периметарот на големиот правоаголник што е составен од пет исти квадрати, секој со периметар 8cm, и два исти помали правоаголници, како на цртежот. Колку изнесуваат должините на страните на помалите правоаголници?



Решение. Бидејќи периметарот на секој квадрат е 8см, имаме дека страната на квадратот е 2см. **(5)** Според сликата, за помалите правоаголници важи дека должината им е три пати поголема од страната на квадратот, односно 6 см, а ширината им е половина од страната на квадратот, односно 1см. **(5)**
Должината на големиот правоаголник е 4 пати поголема од страните на квадратот, односно 8 см, а ширината два пати, односно 4 см. **(5)** Периметарот му е $L = 2 \cdot (8 + 4) = 2 \cdot 12 = 24$ см. **(5)**

V одделение

5. Дедо Миле има цветна градина. Во неа насадил 3 реда со црвени и жолти лалиња, 2 реда со бели и црвени каранфили и 1 ред со сини зумбули. Во секој ред насадил по 25 цветови. Но, цвеќињата ги посадил на следниот начин: на секои две црвени лалиња, веднаш до нив садел по три жолти лалиња, а по секој бел каранфил следуваат по 4 црвени каранфили. Ако црвените цвеќиња чинат по 5 денари, белите по 4, жолтите по 3, а сините по 1 денар, колку пари ќе заработи дедо Миле на пазар, ако ги продаде сите цвеќиња?

Решение: Прво треба да се пресмета по колку цветови има во градината на дедо Миле. Во еден ред има 25 цветови. Во редовите со лалиња има 2 црвени, па 3 жолти, па потоа се повторува. Па вакви пет лалиња се повториле 25:5=5 пати. Значи, во тој ред има 10 црвени и 15 жолти лалиња. Но такви реда се три, па вкупно има 30 црвени и 45 жолти лалиња. **(6)** Исто така, во редот со каранфили, на 1 бел, следуваат 4 црвени каранфили. Значи вакви пет каранфили се повториле 25:5=5 пати. Па, во тој ред има 5 бели и 20 црвени каранфили. Такви реда има 2, па вкупно има 10 бели и 40 црвени каранфили. **(6)** Има еден ред со сини зумбули, па вкупно има 25 сини зумбули. **(3)** Значи вкупно има 30 црвени лалиња и 40 црвени каранфили, односно 70 црвени цвеќиња; вкупно има 10 бели цвеќиња, 45 жолти цвеќиња и 25 сини цвеќиња. Значи, дедо Миле на пазар ќе заработи вкупно $70 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 45 \cdot 3 + 25 \cdot 1 = 350 + 40 + 135 + 25 = 550$ денари. **(5)**

Втор начин: Да нацрта цртеж на градината во кој со крукчиња ќе ги обележи цветовите и ќе ги изброи, а потоа ќе ги пресмета парите. Учениците може да употребуваат боички. **(цртеж 6, броење на цветовите 7 и пресметка на парите 7).**

VI одделение

1. (Нумерус 3084.) Кутија со 30 еднакви топчиња има маса од 650 грама. Ако во кутијата додадеме уште 10 такви топчиња, вкупната маса ќе биде 800 грама. Колкава е масата на кутијата?

Решение. Со додавање на 10 топчиња во кутијата, вкупната маса се зголемува за $800-650=150$ грама. **(5)** Па, едно топче има маса $150:10=15$ грама. **(5)** Оттука сите топчиња во кутијата имаат маса $30\cdot15=450$ грама. **(5)** Масата на кутијата е $650-450=200$ грама. **(5)**

2. Симетралите на соседните агли α и β се сечат под прав агол. Пресметај ги аглите α и β ако $\alpha-\beta=30^{\circ}$.

Решение. За соседните агли α **и** β, од условот за симетралите имаме дека $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90^{0}$, односно $\alpha+\beta=180^{0}$, т.е. бараните агли се суплементни. **(5)** Тогаш, од $\alpha-\beta=30^{0}$ имаме $\beta=\alpha-30^{0}$ и $\alpha+(\alpha-30^{0})=180^{0}$,**(5)** од каде $2\alpha=210^{0}$, односно $\alpha=105^{0}$. Тогаш $\beta=75^{0}$.**(10)**

3. (Нумерус 3038.) Мартин е 3 пати помлад од татко му, а заедно имаат 44 години. По колку години, Мартин ќе биде 2 пати помлад од татко му.

Решение. Прв начин: Нека годините на Мартин ги означиме со x, а годините на татко му со y. Од првиот услов имаме $x+y=44$, $y=3x$,**(5)** од каде следува $x+3x=44$ односно $4x=44$ односно $x=11$. Оттука $y=33$.**(5)** Нека бројот на години после кои Мартин ќе биде 2 пати помал од татко му е z. Тогаш важи $2(11+z)=33+z$ односно $22+2z=33+z$, од каде имаме $z=11$. **(5)**

Значи Мартин има 11 години, татко му има 33 години и после 11 години, Мартин ќе биде 2 пати помал од татко му, односно тој ќе има 22 години а татко му 44. **(5)**

Втор начин: Нека годините на Мартин ги означиме со x. Значи татко му ќе има $3x$ години. **(5)** Заедно ќе имаат $4x$ години, односно $4x=44$, па $x=11$. ОттукаМартин има 11 години, а татко му има 33 години.**(5)** **Варијанта 1:**Нека бројот на години после кои Мартин ќе биде 2 пати помал од татко му е z. Тогаш важи $22+2z=33+z$, од каде имаме $z=11$. **(5)** Значи после 11 години, Мартин ќе биде 2 пати помал од татко му, односно тој ќе има 22 години а татко му 44. **(5)**
Варијанта 2: за вториот дел од задачата. Ако го добиле со проба, што ќе се случи по 1, по 2 години итн и дојде до решение, ги добива сите поени од задачата. **(10)**

4. Нивата на еден земјоделец има форма на правоаголник, со должина два пати поголема од ширината. Таа е заградена со три реда жица, за што биле употребени $360m$ жица. Нивата била посеана со пченица. Колку килограми пченица се добиени, ако од секои $100\,m^2$ се добиваат $35kg$ пченица?

Решение. Димензиите на нивата се ширина x и должина $2x$. Периметарот на нивата е $L=2(x+2x)=6x$.**(5)** Ако нивата е заградена со три реда жица со должина $360m$, тогаш за еден ред жица потребни се $360:3=120m$ жица, а исто толку изнесува и периметарот на нивата. Јасно, тогаш важи $6x=120m$, односно ширината на нивата е $x=20m$, а должината $40m$. **(5)** Плоштината на нивата е $P=20\cdot40\,m^2=800\,m^2$. **(5)** Вкупното количество пченица кое е добиено е $8\cdot35\,kg=280\,kg$. **(5)**

5. Производот на два броја е 1325. Ако помалиот од нив се зголеми за 5, а другиот остане ист, се добива нов производ 1590. Одреди ги тие броеви.

Решение. Прв начин: Едниот множител е $(1590-1325):5=53$,**(10)** додека другиот множител е $1325:53=25$.**(10)**

Втор начин: $1325=5\cdot5\cdot53$.**(8)** Значи, помалиот множител мора да биде 25, зашто не може да е 5 (за 5 не важи условот на задачата**(6)**). Па, броевите се 25 и 53. **(6)**

VII одделение

1. (Нумерус 3161.) Од буре со бензин се истурени прво $\frac{1}{4}$ од бензинот, а потоа уште 10% од вкупното количество бензин. Останале 26 литри бензин. Колку литри имало на почетокот?

Решение. Нека на почетокот имало x литри бензин. Тогаш $x-\frac{1}{4}x-\frac{10}{100}x=26$.**(10)** Оттука $x=40$.**(10)**

2. Одреди ги сите цифри a,b за кои бројот $\overline{a13b}$ е делив со 45.

Решение. Бројот $\overline{a13b}$ е делив со 45 ако е делив со 9 и 5. Значи b може да биде 0 или 5. **(4)** Ако $b=0$, тогаш $\overline{a130}$ е делив со 9 ако $a+1+3+0=a+4$ е делив со 9, па $a=5$, па бараниот број е 5130. **(8)** Ако, пак, $b=5$, тогаш $\overline{a135}$ е делив со 9 ако $a+1+3+5=a+9$. Но $a\neq 0$, па останува $a=9$ т.е. бараниот број е 9135. **(8)**

3. (Нумерус 2971.) Множеството M се состои од сите прости делители на бројот 2310. Колку елементи има множеството што се состои од сите броеви кои се добиени како производ на точно два елементи од множеството M ?

Решение. Прости делители на бројот 2310 се 2, 3, 5, 7 и 11 и нивниот производ е точно 2310 .**(5)** Значи, $M=\{2, 3, 5, 7, 11\}$,**(5)** а множеството од попарни производи на елементите од M е множеството $A=\{6, 10, 14, 22, 15, 21, 33, 35, 55, 77\}$,**(5)** и тоа има 10 елементи. Значи, бараниот број е 10. **(5)**

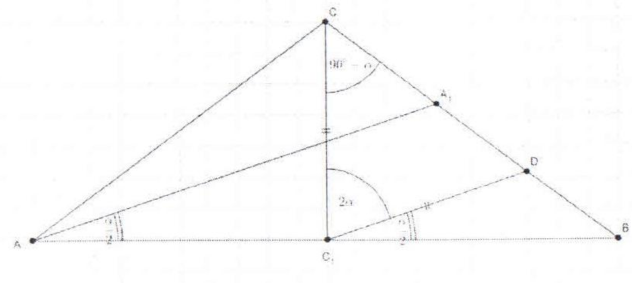
Забелешка. Не мора да ги наоѓа производите, доволно е да запише {2,3}, {2,5}, {2,7}, {2,11}, {3,5}, {3,7}, {3,11}, {7,7}, {5,11} и {7,11}.

4. Правоаголник и квадрат имаат еднакви плоштини. Мерните броеви на нивните димензии се природни броеви од првата десетка. Ако ширината на правоаголникот е $2cm$, определи ги димензиите на правоаголникот и квадратот.

Решение. Ќе ја означиме плоштината на квадратот со P_1, а неговата страна со a. Да ја означиме плоштината на правоаголникот со P_2 и неговата должина со b. Тогаш од условите на задачата важи $P_1=a\cdot a=2\cdot b=P_2$, при што a,b се броеви од првата десетка, $a\neq 2$. **(5)** Од $a\cdot a=2\cdot b$ добиваме дека бројот $2|a$, односно $a\in\{4,6,8\}$.**(5)** За $a=4$, добиваме $b=8$ и тогаш квадратот има страна $4cm$, а правоаголникот страни $2cm, 8cm$.**(5)** Добиеното решение е единствено. Навистина, за $a=6$ се добива дека $b=18$, но тогаш 18 не е број од првата десетка. Истото важи и за $a=8cm$.**(5)**

5. Одреди ги аглите во рамнокракиот триаголник ABC, кај кој висината спуштена кон основата е два пати помала од должината на симетралата на еден од аглите при основата.

Решение. Нека ΔABC има краци $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\overline{CC_1}$ е висината спуштена кон основата AB и $\overline{AA_1}$ е должината на симетралата на $\angle BAC=\alpha$. Според условот $\overline{AA_1}=2\overline{CC_1}$ и



$\angle BAA_1=\frac{\alpha}{2}$ **.(5)** нека D е точка која лежи на средината на BA_1. Тогаш $C_1D \| AA_1$ и $\overline{C_1D}=\frac{\overline{AA_1}}{2}=\overline{CC_1}$, па и $\angle BC_1D=\angle BAA_1=\frac{\alpha}{2}$ **.(5)** Значи ΔCC_1D е рамнокрак и $\angle DCC_1=\angle C_1DC=90^0-\alpha$, па мора $\angle DC_1C=180^0-2(90^0-\alpha)=2\alpha$ **.(5)** Конечно, $\angle DC_1C+\angle BC_1D=2\alpha+\frac{\alpha}{2}=90^0$, од каде се добива дека $\alpha=36^0$ и $\beta=180^0-2\alpha=108^0$ **.(5)**

VIII одделение

1. (Нумерус, 3020.) Определи го збирот a^2+b^2, ако $a+b=24$ и $a\cdot b=143$.

Решение. Имаме

$a^2+b^2=a^2+b^2+2ab-2ab=(\mathbf{8})=(a+b)^2-2ab=(\mathbf{8})=24^2-2\cdot143=576-286=290$ $(\mathbf{4})$.

2. (Нумерус 3119.) Отсечка со должина $89{,}6cm$ подели ја на четири делови, така што $\frac{1}{2}$ од првиот дел е еднаква на $\frac{1}{3}$ од вториот, $\frac{1}{3}$ од вториот е еднаква на $\frac{1}{4}$ од третиот и $\frac{1}{4}$ од третиот е еднаква на $\frac{1}{5}$ од четвртиот. По колку сантиметри има секој од тие делови.

Решение. Нека x_1,x_2,x_3,x_4 се првиот, вториот, третиот и четвртиот дел, соодветно.

Тогаш $\frac{1}{2}x_1=\frac{1}{3}x_2=\frac{1}{4}x_3=\frac{1}{5}x_4=k$, **(5)**

односно $x_1=2k, x_2=3k, x_3=4k, x_4=5k$. **(5)**

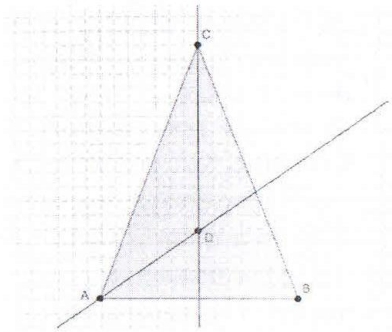
Според тоа, $2k+3k+4k+5k=89{,}6$, **(5)**

од каде $k=6{,}4$. Па деловите се 12,8*cm*, 19,2*cm*, 25,6*cm* и 32*cm*. **(5)**

3. На бројот 10 допиши му и од лево и од десно по една цифра така да добиениот четирицифрен број биде делив со 9 и со 4.

Решение. За новодобиениот број $\overline{a10b}$ да е делив со 4 потребно е да завршува на 00, 04 или 08, односно $b\in\{0,4,8\}$.**(5)** За бројот да е делив со 9 треба збирот на цифрите да е делив со 9, односно $a+b+1$ да е делив со 9. **(5)** За $b=0$, $a+b+1=a+1$ може да биде само 9. Тогаш, $a=8$ и бројот е 8100. За $b=4$, $a+b+1=a+5$ може да биде само 9. Тогаш, $a=4$ и бројот е 4104. И на крај, за $b=8$, $a+b+1=a+9$ може да биде 18. Тогаш, $a=9$ и бројот е 9108. **(10)**

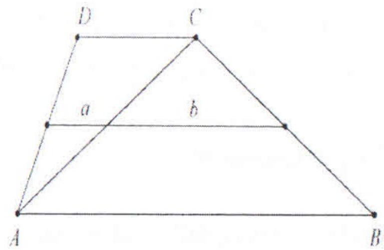
4. Во рамнокракиот триаголник ABC повлечени се симетралите на аголот при врвот и на аголот при основата. Тие се сечат под агол од $130°$. Одреди ги аглите во триаголникот.



Решение. Да ги означиме аглите при основата со α и при врвот со β. Тогаш од условот на задачата имаме $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+130^0=180^0$, па $\alpha+\beta=100^0$. **(7)** Од друга страна за аглите во ΔABC важи $2\alpha+\beta=180^0$.**(7)** Значи $\alpha=80^0$, па $\beta=20^0$. **(6)**

VIII одделение

5. Во трапезот $ABCD$ дијагоналата AC ја дели средната линија на отсечки со должини a и b. Одреди го количникот од плоштините на триаголниците ΔABC и ΔACD.



Решение. Нека h е висината на трапезот. Исечоците a и b од средната линија на трапезот се средни линии за триаголниците ΔACD и ΔABC. **(5)** Според тоа, $\overline{AB} = 2 \cdot b$ и $\overline{DC} = 2 \cdot a$,**(5)** односно $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{\overline{AB} \cdot h}{2}}{\frac{\overline{DC} \cdot h}{2}} = \frac{b}{a}$. **(10)**

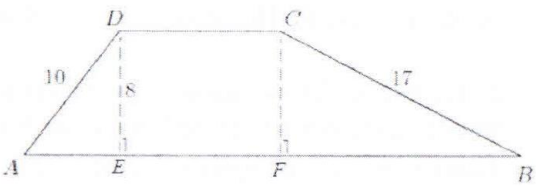
IX одделение

1. (Нумерус 3168.) Ако $x+y=0$ и $x^2+y^2=\frac{1}{4}$, пресметај x^4+y^4.

Решение. Ако $x+y=0$, тогаш $(x+y)^2=0$,**(5)** т.е. $2xy=-(x^2+y^2)$, па затоа $2xy=-\frac{1}{4}$, односно $xy=-\frac{1}{8}$.**(5)** Според тоа,

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(\tfrac{1}{4})^2-2(-\tfrac{1}{8})^2=\tfrac{1}{16}-\tfrac{2}{64}=\tfrac{1}{32}.\textbf{(10)}$$

2. Плоштината на трапезот $ABCD$ е $164cm^2$. Висината е $8cm$, должините на краците BC и AD се $17cm$ и $10cm$, соодветно. Колку е должината на основата CD?



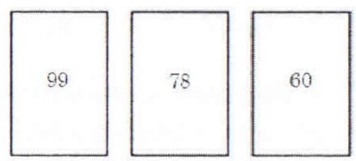
Решение. Од формулата за плоштина добиваме

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\frac{2P}{h}=\frac{328}{8}=41cm. \qquad \textbf{(5)}$$

Нека DE и CF се висини во трапезот.

Тогаш, од теоремата на Питагора добиваме дека $\overline{AE}=6cm$ и $\overline{FB}=15cm$,**(5)** а тогаш $\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{EF}+\overline{FB}=\overline{AE}+\overline{CD}+\overline{FB}=21+\overline{CD}$.**(5)** Оттука, $21+\overline{CD}+\overline{CD}=41$, односно $\overline{CD}=10cm$. **(5)**

3. Марко напишал 6 различни броеви на 3 карти, по еден на секоја страна на картите. Збировите на двата броја што се запишани на секоја од трите карти се еднакви. Марко ги поставил картите така што се гледаат само три броја, како на цртежот. Познато е дека скриените броеви се прости. Одреди ги скриените броеви.



Решение. Од условот на задачата, збировите на двата запишани броеви на иста карта се еднакви, па нека е S. Ако S е парен број, тогаш скриените броеви на втората и третата карта треба да бидат парни броеви. **(5)** Но тие треба да се различни и прости броеви, па овој случај не е можен (има само еден парен прост број 2). Затоа, S е непарен број, **(5)** т.е. на картата со број 99 скриениот број е парен и прост, т.е. 2.**(5)** Тогаш $S=101$ и затоа скриениот број на втората карта е $101-78=23$, а на третата карта е $101-60=41$. (5)

IX одделение

4. (Нумерус 3169.) Даден е триаголник ABC така што $\angle BAC = 60^\circ$. Нека O е центар на опишаната кружница околу триаголникот и D е произволна точка на лакот BC (лакот на кој не лежи точката A). Докажи дека $\angle BOC + \angle OCD = 120^\circ$.

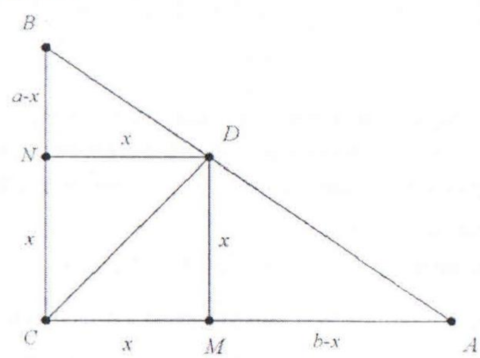
Решение. Важи $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 120^\circ$, бидејќи централниот агол е двапати поголем од периферниот. **(5)** Сега, бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тетивен следува дека $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. **(5)** Од четириаголникот $BDCO$ добиваме $\angle BOC + \angle OCD + \angle CDB + \angle DBO = 360^\circ$ **(5)**

односно $120^\circ + \angle OCD + 120^\circ + \angle DBO = 360^\circ$,

од каде следува дека $\angle OCD + \angle DBO = 120^\circ$. **(5)**

5. Должините на катетите на правоаголниот триаголник ABC се a и b. Симетралата на правиот агол кај темето C ја сече хипотенузата во точката D. Пресметај ја должината на отсечката CD.

Решение. Нека M и N се подножјата на нормалите спуштени од точката D на катетите $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$, соодветно. Триаголниците ΔCMD и ΔCND се рамнокраки и правоаголни, **(5)** од каде следува дека четириаголникот $MDNC$ е квадрат. **(5)** Нека со x ја означеме страната на овој квадрат. Бидејќи $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta CDB} + P_{\Delta ADC}$



добиваме дека $\frac{ab}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{bx}{2}$, односно $x = \frac{ab}{a+b}$. **(5)** Бидејќи $\overline{CD}$ е дијагонала на квадратот $MDNC$, добиваме дека $\overline{CD} = x\sqrt{2} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. **(5)**