IV одделение деветолетка

1. (конкурсни задачи 2864) На прашањето колку години има Стојан тој одговорил: "Ако од бројот на моите години го одземете 5, добиениот број го поделите со 5, па од тој резултат повторно одземете 5, ќе добиете 5". Колку години има Стојан?

Решение 1. Ќе тргнеме со решавање во обратна насока. На бројот 5 што е добиен како резултат му додаваме 5**(…5)**, потоа го множиме со 5**(…5)**, па пак му додаваме 5 и ќе ги добиеме годините на Стојан**(…5)**. Имено, Стојан има $(5+5)\cdot 5+5=55$ години**(…5)**.

Решение 2. Нека x е бројот на годините на Стојан **(…5)**. Тогаш од условот на задачата имаме

$(x-5):5-5=5$, **(…5)**
$(x-5):5=10$
$x-5=50$
$x=55$

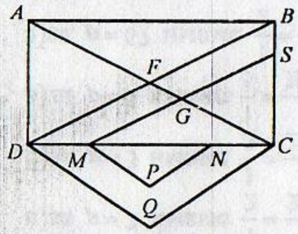
Значи Стојан имал 55 години**(…10)**.

2. (конкурсни задачи 2867) На една полица има три книги. Првата има 90, втората 110, третата 150 страници. Кориците на книгите се со еднаква дебелина и секоја од нив е дебела 2 mm. Колку милиметри се дебели книгите заедно ако се знае дека 10 страници имаат дебелина 1mm?

Решение. Секоја книга има по две корици, па вкупниот број на корици е шест, а нивната вкупна дебелина е $12mm$. **(…5)** Вкупниот број на страници е $90+110+150=350$ **(…5)**.

Па вкупната дебелина на сите страници е $350:10=35mm$ **(…5)**.

Конечно, дебелината на сите три книги заедно е $12+35=47mm$ **(…5)**.



3. Колку триаголници има на цртежот. Испишете ги!

Решение. ABC, ACD, DBC, DBA, AFB, ADF, DFG, FBC, MCG, GSC, MSC, MPN, CDQ**(…15)**. Има вкупно 13 триаголници**(…5)**.

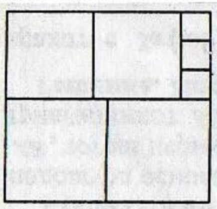
4. Иван почнал да гледа некој филм во 20 часот и 20 минути. За време на филмот два пати имало прекин заради прикажување на реклами. Првиот прекин траел 3 минути а вториот 4 минути. Прикажувањето на филмот завршило во 22 часот и 37 минути. Колку би траел филмот без реклами?

Решение. Од 22 ч и 37 мин. ги одземаме 20 ч и 20 мин**(…5)**, па добиваме 2 часа и 17 минути**(…5)**. Потоа од нив ќе ги одземеме 3+4=7 минути**(…5)** кои се пауза за реклами, па добиваме дека филмот трае 2 часа и 10 минути**(…5)**.

5. Ана сака да купи неколку моливчиња. Ако купи 6 моливчиња, ќе иостанат 7 денари а ако купи 10 моливчиња ќе и недостигаат 5 денари. Колку чини секое моливче и колку денари имала Ана.

Решение. Нека едно моливче чини x денари**(…5)**. Тогаш, од условот на задачата имаме дека $6x+7=10x-5$ **(…7)**, односно $4x=12$ или едно моливче чини $x=3$ денари**(…3)**. Ана имала 6*3+7=25 денари.**(…5)**

V одделение



1. (конкурсни задачи 2851) Правоаголник е поделен на 7 квадрати. (види цртеж) Ако периметарот на најмалиот квадрат е 2 cm, колкав е периметарот на почетниот правоаголник.

Решение. Периметарот на најмалиот квадрат е 2 cm, па должината на неговата страна е $\frac{1}{2}$ cm**(...5)**. Тоа значи дека должината на страна од вториот по големина квадрат е $\frac{3}{2}$ cm. Должината на едната страна на правоаголникот е $\frac{7}{2}$ **(...5)**. Збирот на должините на две страни на најголемиот квадрат е еднаков на збирот од должините на три страни од средниотиот квадрат и една страна од најмалиот квадрат, па должината на страна на најголемиот квадрат е $\frac{7}{4}$ cm **(...5)**. Оттука должината на правоаголникот е $\frac{14}{4}$ cm, а ширината $\frac{13}{4}$ cm. Затоа периметарот на правоаголникот е $\frac{54}{4}$ cm**(...5)**.

2. (конкурсни задачи 2871). Драган, Боби и Мартин имаат заедно 12000 денари. Драган половина од своите пари ги поделил на два еднакви дела и ги дал на Боби и Мартин, а другата половна ја задржал за себе. Исто така постапил и Боби, а потоа и Мартин, после што тројцата пријатели имале ист износ, т.е. по 4000 денари кај себе. Колку пари има секој од нив на почетокот?

Решение. Ќе тргнеме со решавање на задачата во обратна насока. На крајот од поделбите на парите сите имале ист износ, односно 4000 денари**(...5)**. Пред поделбата на парите Мартин имал $4000\cdot 2=8000$ денари, а Драган и Боби $4000-4000:2=2000$ денари**(...5)**. Пред Боби да го подели својот дел на начин како во задачата тој имал $2000\cdot 2=4000$, а Драган и Мартин имале $2000-2000:2=1000$ и $8000-2000:2=7000$ денари, соодветно**(...5)**. Конечно на почетокот Драган имал $1000\cdot 2=2000$ денари, Боби имал $4000-1000:2=3500$ денари и Мартин имал $7000-1000:2=6500$ денари**(...5)**.

3. Мајката на Борче е три пати постара од Борче, а неговиот татко е четири години постар од мајката на Борче. Колку години има секој од нив, ако заедно имаат 88 години?

Решение. Ќе го означиме бројот на годините на Борче со x. Тогаш мајаката на Борче има три пати повеќе години, односно $3x$ години, а таткото има четири години повеќе од мајката, односно има $3x+4$ години**(...7)**. Бидејќи вкупно имаат 88 години, добиваме $x+3x+(3x+4)=88$, односно $7x+4=88$ **(...5)**. Од тука $7x=84$, а $x=12$ **(...5)**. Значи, Борче има 12 години, неговата мајка 36, а неговиот татко 40 години**(...3)**.

4. Збирот на 4 броеви е 100. Збирот на првиот, третиот и четвртиот е 65, а збирот на првиот вториот и третиот е 78. Одреди ги собироците, ако првиот собирок е за 10 помал од вториот.

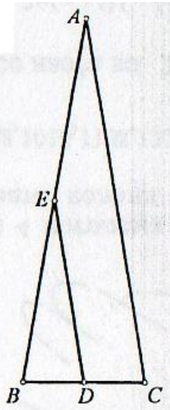
Решение. Ако a,b,c и d се првиот, вториот, третиот и четвртиот број соодветно, од условот на задачата имаме

$$a+b+c+d=100\ \textbf{(...5)}.$$

Бидејќи $a+c+d=65$, добиваме дека $b+65=100$, односно $b=35$ **(...7)**. Од друга страна, од $a+b+c=78$, добиваме $78+d=100$, односно $d=22$ **(...3)**. Бидејќи, $a+10=b$, добиваме $a=35-10=25$. Сега е јасно дека $c=18$ **(...5)**.

5. Владо, Бобан и Кате имаат вкупно 600 денари. Ако Владо потроши половина од своите пари, Бобан две третини од своите париа а Кате потроши четири петтини од своите пари, тогаш секому од нив ќе му остане еднаква сума пари. По колку пари имал секој од нив?

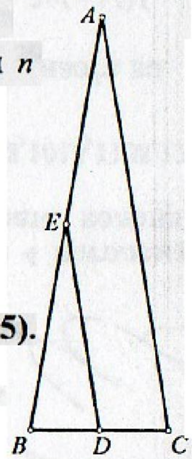
Решение. Нека x е сумата која им останала на секој од нив по трошењето. Владо потрошил половина, значи на почеток имал $2x$**(...5)**. Бобан потрошил две третини, му останала една третина, па на почеток имал $3x$**(...5)**. На Кате и останале една петтина од парите, значи на почеток имала $5x$**(...5)**. Сите заедно имале 600 денари, односно $2x+3x+5x=600$, од каде $x=60$ денари. Значи Владо имал 120 денари, Бобан 180 денари, а Кате 300 денари**(...5)**.



VI одделение деветолетка

1.(конкурсни задачи 2854) Рамнокракиот триаголник ABC има крак што е 3 пати подолг од основата. Ако точката D е средина на основата, а точката E средина на кракот AB, тогаш периметарот на четириаголникот $AEDC$ е за 42 cm поголем од периметарот на триаголникот EBD. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC.

Решение. Нека основата на триаголникот ABC има должина a. Тогаш должината на кракот е $3a$ **(...5)**. Важи $L_{AEDC}=\frac{3}{2}a+\overline{ED}+\frac{a}{2}+3a$ и $L_{EBD}=\frac{3}{2}a+\overline{ED}+\frac{a}{2}$ **(...5)**. Тоа значи дека $3a=42$ односно $a=14\,\text{cm}$. Должината на кракот е $42\,\text{cm}$**(...5)**. Следува периметарот на триаголникот ABC е $L=14+42+42=98\,\text{cm}$ **(...5)**.



2(конкурсни задачи 2896) Најди ги сите прости броеви p и природни броеви n за кои важи $\frac{1}{p}=\frac{n}{2010}$?

Решение 1. Од условот на задачата имаме дека $n\cdot p=2010$ **(...5)**, односно $n\cdot p=2\cdot3\cdot5\cdot67$ **(...5)**.
Од овде вредноста на бројот p може да биде 2, 3, 5, 67 **(...5)**.
Па, конечно за $p=2$, $n=1005$, за $p=3$, $n=670$, за $p=5$, $n=402$, за $p=67$, $n=30$ **(...5)**.

Решение 2. Бројот 2010 можеме да го запишеме во облик $2010=2\cdot3\cdot5\cdot67$, па според тоа p може да биде 2,3,5,67 **(...8)**.

а)за $p=2$ имаме $\frac{1}{2}=\frac{n}{2010}$, односно $n=1005$, **(...3)**

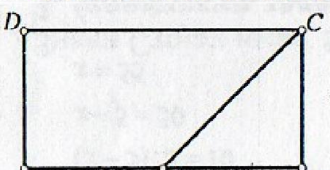
б)за $p=3$ имаме $\frac{1}{3}=\frac{n}{2010}$, односно $n=670$, **(...3)**

в)за $p=5$ имаме $\frac{1}{5}=\frac{n}{2010}$, односно $n=402$, **(...3)**

а)за $p=67$ имаме $\frac{1}{2}=\frac{n}{2010}$, односно $n=30$. **(...3)**

3. Определи ги вредностите на цифрите a и b така што бројот $\overline{78a9b}$ е делив со 18.

Решение. Бројот $78a9b$ е делив со 2 и 9, па според тоа $b\in\{0, 2, 4, 6, 8\}$ **(...7)**. Секоја од мо`ностите ќе ја разгледаме одвоено**(...3)**.
а) за $b=0$ добиваме $7+8+9+a+b=24+a$, па според тоа $a=3$. **(...2)**
б) за $b=2$ добиваме $a=1$, **(...2)**
в) за $b=4$ добиваме $a=8$, **(...2)**
г) за $b=6$ добиваме $a=6$ **(...2)**
д) за $b=8$ добиваме $a=4$. **(...2)**



4. Во правоаголникот $ABCD$, должината AB е двапати поголема од ширината $\overline{BC}$. На страната $\overline{AB}$ е избрана точка P така што P е средина на $\overline{AB}$. Со отсечката $\overline{PC}$ правоаголникот е поделен на еден четириаголник и еден триаголник чии периметри се разликуваат за 20 cm. Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

Решение. Ако означиме дека $\overline{BC}=b$ тогаш $\overline{AP}=\overline{PB}=\overline{AD}=b$. **(...5)** Периметарот на четириаголникот $APCD$ е $b+b+2b+\overline{PC}$, а периметарот на триаголникот PBC е $b+b+\overline{PC}$ **(...5)**. Од условот на задачата имаме дека периметрите се разликуваат за 20 па се добива $2b=20$, односно $b=10$ cm **(...5)**. За должината на правоаголникот $\overline{AB}=a$ имаме $a=2b=20$ cm, а за плоштината $P=ab=10\cdot20=200\,\text{cm}^2$ **(...5)**.

5. Да ја разгледаме следната табела

4				
8	12			
16	20	24		
28	32	36	40	
...	...	...	...	...

Во која редица(хоризонтала) се наоѓа бројот 2012.

Решение 1. Во првата вертикала, разликата меѓу два соседни броја е за 4 поголема од разликата на претходните два такви броја**(...10)**. Според тоа, во првата колона се броевите:

$4, 8, 16, 28, 44, 64, 88, 116, 148, 184, 224, 268, 316, 368, 424, 484, 548, 616, 688, 764, 844, 928, 1016, 1108, 1204, 1304, 1408, 1516, 1628, 1744, 1864, 1988, 2116$

Бројот 2012 се наоѓа помеѓу броевите 1988 и 2116 **(...5)**, па според тоа тој се наоѓа во 32-та редица(хоризонтала)**(...5)**.

Решение 2. Забележуваме дека последен елемент во n-тата редица е $2n(n+1)$ **(...10)**. Ако 2012-от број е во n-тата редица, важи $2(n-1)n < 2012 \leq 2n(n+1)$ или $(n-1)n < 1006 \leq n(n+1)$ **(...5)** Јасно $n > 30$, бидејќи $30 \cdot 31 = 930$. За $n = 31$, $31 \cdot 32 = 992$ и за $n = 32$, $32 \cdot 33 = 1056$. Оттука добиваме дека $n = 32$. Значи 2012-от елемент се наоѓа во 32 редица**(...5)**.

VII одделение

1(конкурсни задачи 2852) Да се определат внатрешните агли на триаголникот, ако е познато дека големината на еден агол е $\frac{8}{15}$ од големината на другиот агол и $\frac{4}{11}$ од големината на третиот агол.

Решение. Нека со α, β и γ ги означиме внатрешните агли во триаголникот. Од условот на задачата следува дека $\alpha=\frac{8}{15}\beta$ и $\alpha=\frac{4}{11}\gamma$ **(...5)** Тогаш $\beta=\frac{15}{8}\alpha$ и $\gamma=\frac{11}{4}\alpha$ **(...5)**. Бидејќи збирот на внатрешните агли во триаголникот е 180^0 добиваме $\alpha+\frac{15}{8}\alpha+\frac{11}{4}\alpha=180^0$ **(...5)**. Решението на равенката е $\alpha=32^0$. Тогаш $\beta=60^0$ и $\gamma=88^0$ **(...5)**.

2(конкурсни задачи 2875). Да се напишат сите петцифрени броеви од облик $\overline{abcda}$ деливи со 45, при што цифрата на местото на стотките е најголемиот едноцифрен прост број.

Решение. Еден број е делив со 45, ако тој е делив со 9 и 5. Еден број е делив со 5 ако тој завршува на 0 или 5. Бидејќи бројот почнува на a, цифрата a мора да биде 5 **(...5)**.

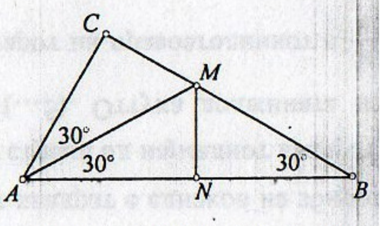
Од условот на задачата цифрата c е еднаква на 7 **(...2)**.

Еден број е делив со 9 ако збирот на неговите цифри е делив со 9. Па затоа збирот $5+b+7+d+5=17+b+d$ мора да биде делив со 9, збирот $b+d$ мора да биде еднаков на 1 или 10 **(...7)**.

Ако $b+d=1$, тогаш броевите се 50715 и 51705 **(... 3)**.

Ако $b+d=10$, тогаш броевите се 51795, 52785, 54765, 56745, 58725, 59715 **(...5)**.

3. Нека ABC е правоаголен триаголник со хипотенуза AB таков што $\measuredangle BAC=60^\circ$. Нека M е пресекот на симетралата на аголот $\measuredangle BAC$ со катетата $\overline{BC}$. Точката N е средина на AB. Докажи дека $\overline{CM}=\overline{MN}$.



Решение. Од условот на задачата имаме $\measuredangle ABC=30^\circ$ **(...5)**. Бидејќи AM е симетрала (види цртеж), имаме $\measuredangle ABC=\measuredangle BAM=30^\circ$. Значи, триаголникот ABM е рамнокрак. **(...5)** Според тоа, MN е и висина во ABM повлечена кон AB **(...5)**. Оттука добиваме $\Delta ANM\cong\Delta ACM$, од каде добиваме дека $\overline{MN}=\overline{CM}$ **(...5)**.

4. Учениците од едно училиште требало да одат на екскурзија. Се пријавиле $\frac{2}{9}$ повеќе ученици од планираниот број. Пред тргнување поради настинка се откажале $\frac{3}{11}$ од пријавените ученици, па на екскурзија отишле 5 ученици помалку од планираниот број. Колку ученици заминале на екскурзија?

Решение. Да го означиме планираниот број на ученици со x. Тогаш по пријавувањето имало $x+\frac{2}{9}x=\frac{11}{9}x$ **(...5)**. Бидејќи пред тргнувањето се откажале $\frac{3}{11}$ од пријавените ученици, т.е. се откажале $\frac{3}{11}\cdot\frac{11}{9}x=\frac{3}{9}x=\frac{1}{3}x$ од планираниот број на ученици. Значи вкупниот број на ученици кои одат на екскурзија е $\frac{11}{9}x-\frac{1}{3}x=\frac{8}{9}x$ **(...5)**. На екскурзија отишле 5 ученици помалку од планираниот број, па според тоа $\frac{8}{9}x=x-5$, т.е. $x=45$ **(...5)**

Значи, на екскурзија заминале $x-5=45-5=40$ **(...5).**

5. Цената на некој материјал е намалена за 52%. После тоа намалување, за 240 денари може да се купи 1 m материјал повеќе отколку што би можело да се купи пред намалувањето за 270 денари. Одреди ја цената на тој материјал пред намалувањето.

Решение: Нека означиме со x- цената на материјалот, а со y - количината на материјалот во метри. После намалувањето имаме:

$x-52\%x=x-0,52x=0,48x$. **(...5)**

Тогаш $240=0,48x\cdot y+0,48x$ **(...5)**

Пред намалувањето имаме: $270=xy$ **(...5),** па затоа

$240=0,48\cdot 270+0,48x$

$240=129,6+0,48x$

$x=230$

Цената на материјалот пред намалувањето била 230 денари. **(...5)**

VII одделение осмолетка

1(конкурсни задачи 2876) Набрани се 600 кг. печурки чија влажност е 98%. После сушењето, влажноста е намалена на 96%. Колкава е масата на печурките по сушењето?

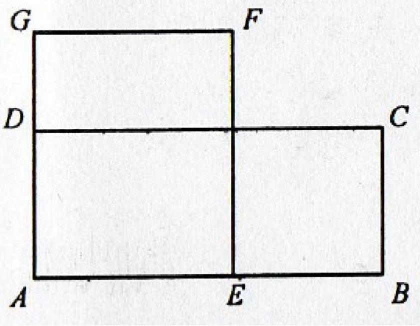
Решение. Во 600 кг. печурки со влажност 98% има 588кг. вода и 12кг. сува материја(**...5**). После сушењето 12кг. сува материја

претставува 4% од вкупната маса на печурките(**...5**). Нека со x ја означима масата на печурките после сушењето. Тогаш $0.04\cdot x=12$, од каде $x=300$ кг(**...10**).

2(конкурсни задачи 2905). Одреди ги сите парови цели броеви x и y за кои важи $xy-7x-y=3$.

Решение. Равенката $xy-7x-y=3$ може да се запише како $xy-y=3+7x$, односно $y(x-1)=7x+3$ (**...5**). За $x=1$ добиваме равенка $y\cdot 0=10$ која нема решенија. За $x\neq 1$, имаме $y=\frac{7x+3}{x-1}=7+\frac{10}{x-1}$. Па y е цел број ако $\frac{10}{x-1}$ е цел број (**...5**), односно мора $x-1\in\{1,-1,2,-2,5,-5,10,-10\}$, па $x\in\{2,0,3,-1,-4,6,11,-9\}$ (**...5**) . Значи цели решенија на равенката се $(2,17)$, $(0,-3)$, $(3,12)$, $(-1,2)$, $(6,9)$, $(-4,5)$, $(11,8)$, $(-9,6)$ (**...5**).

3. Една кутија боја е доволна да се обои парче картон во облик на правоаголник на кој едната страна му е трипати поголема од другата страна. Ако од парчето картон направиме нов правоаголник, скратувајќи ја подолгата страна за 18 cm и продолжувајќи ја другата за 8 cm за боење ќе потрошиме исто количество боја. Одреди го периметарот на новиот правоаголник.



Решение. Да го означиме почетниот правоаголник со $ABCD$, каде $\overline{AB}=a$ и $\overline{BC}=b$ (**...5**). Од условот на задачата имаме $a=3b$ (**...5**). Ако пак со $AEFG$ го означиме новиот правоаголник, тогаш $\overline{AE}=\overline{AB}=3b-18$ и $\overline{EF}=\overline{BC}+8=b+8$. Бидејќи за боењето ќе искористиме исто количество боја, имаме $P_{ABCD}=P_{AEFG}$, т.е. $3b^2=(3b-18)(b+8)$, односно $3b^2=3b^2+24b-18b-144$. Од последната равенка имаме $b=24$ cm (**...5**).

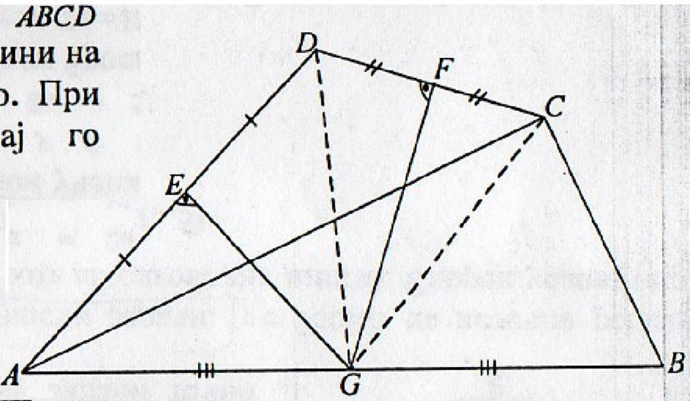
Според тоа, $L_{AEFG}=2(3\cdot 24-18+24+8)=172$ cm (**...5**).

4. На еден фудбалски турнир учествувале 10 фудбалски екипи и притоа секоја екипа одиграла точно по еден натпревар со секоја друга. За секоја победа се добива 3 поени, за нерешено 1 поен, и за пораз 0 поени. На крај е дадена конечна табела од збирот на поени на секоја екипа . Ако збирот од сите поени на конечната табела изнесувал 120, тогаш колку натпревари на фудбалскиот натпревар завршиле нерешено?

Решение. Бројот на сите одиграни натпревари на фудбалскиот натпревар е $9+8+7+...+2+1=45$ (**...5**). Ако со x го означиме бројот на нерешени натпревари тогаш $45-x$ е бројот на натпревари кои завршиле со победник(**...8**). Оттука ја добиваме равенката $3(45-x)+2x=120$ (**...4**) , чие решение е $x=15$.

Значи , на фудбалскиот турнир 15 натпревари завршиле нерешено(**...3**).

5. Во конвексен четириаголник $ABCD$ (трапезоид) точките E,F,G се средини на страните AD,DC и AB соодветно. При тоа $GE \perp AD, GF \perp CD$. Пресметај го аголот $\measuredangle ACB$.



Решение. Од условот на задачата $\overline{AE} = \overline{ED}$, $\measuredangle GEA = \measuredangle DEG = 90°$ и GE е заедничка страна, па според САС триаголниците AGE и DGE се складни.

Од складноста следи дека $\overline{AG} = \overline{GD}$. **(...5)**

Аналогно. $\Delta GFD \cong \Delta GFC$ од каде што $\overline{GD} = \overline{GC}$. **(...5)**

Значи $\overline{AG} = \overline{GD} = \overline{GC}$ и $\overline{AG} = \overline{GB}$ од условот точката G да е средина на страната AB, што значи дека $\overline{GC} = \overline{GB}$ односно дека ΔGBC е рамнокрак. **(...5)**

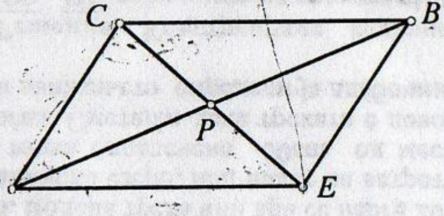
Нека означиме $\measuredangle CAG = \alpha$. Тогаш и $\measuredangle GCA = \alpha$, па

$$\measuredangle CGB = \measuredangle CAG + \measuredangle GCA = 2\alpha .$$

Понатаму, $\measuredangle BCG = \measuredangle GBC = \dfrac{180° - \measuredangle CGB}{2} = 90° - \alpha$. На крај,

$$\measuredangle ACB = \measuredangle GCA + \measuredangle BCG = \alpha + 90° - \alpha = 90° .$$ **(...5)**

VIII одделение осмолетка



1(конкурсни задачи 2883). Даден е тапоаголен триаголник ABC со тап агол во темето C. Нека точката P е средина на страната $\overline{AB}$ и нека $\angle PCA = 90°$, $\angle BCP = 30°$, $\overline{AC} = 3cm$. Да се најде должината на страната $\overline{BC}$.

Решение. Триаголникот ABC го дополнуваме до паралелограм $AEBC$ **(5)**. Тогаш важи $\angle AEC = 30°$ **(5)**, што значи дека триаголникот AEC е половина од некој рамностран триаголник**(5)**, па $\overline{AE} = 2\overline{AC} = 2 \cdot 3 = 6$,односно $\overline{BC} = 6cm$ **(5)**.

2(конкурсни задачи 2860). Реши го системот равенки $\begin{cases} x(y+z)=5 \\ y(x+z)=10 \\ z(x+y)=13 \end{cases}$.

Решение. Ја воведуваме смената $x_1 = xy, x_2 = xz, x_3 = yz$. Тогаш системот го добива обликот

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_3 = 10 \\ x_2 + x_3 = 13 \end{cases} \textbf{(...5).}$$

Го изразуваме x_2 од првата равенка и го заменуваме во третата,

$$\begin{cases} x_2 = 5 - x_1 \\ x_1 + x_3 = 10 \\ 5 - x_1 + x_3 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5 - x_1 \\ x_1 + x_3 = 10 \\ -x_1 + x_3 = 8 \end{cases} \textbf{(...5).}$$

Го изразуваме x_3 од третата равенка и го заменуваме во втората.

$$\begin{cases} x_2 = 5 - x_1 \\ x_1 + 8 + x_1 = 10 \\ x_3 = 8 + x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5 - x_1 \\ 2x_1 = 2 \\ x_3 = 8 + x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 4 \\ x_1 = 1 \\ x_3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ xz = 4 \\ yz = 9 \end{cases} \textbf{.(...5)}$$

Ако ги поделиме првите две равенки и добиваме $\frac{z}{y} = 4$ или $z = 4y$. Ако, пак, замениме во третата равенка добиваме $4y^2 = 9$ или $y = \pm\frac{3}{2}$. Според тоа, $z = \pm 6$ и $x = \pm\frac{2}{3}$ **(...5)**.

Решение 2. Ако во секоја равенка од системот се ослободиме од заграда добиваме

$$\begin{cases} xy + xz = 5 \\ yx + yz = 10 \\ zx + zy = 13 \end{cases} \textbf{(...3)}$$

Ако трите равенки ги собереме, добиваме $2(xy + yz + zx) = 28$ **(...4)**, т.е. $xy + yz + zx = 14$ **(...3)**. Ако од последната равенка ги одземеме првата равенка, па втората равенка, па третата равенка, добиваме $yz = 9$, $xz = 4$ и $xy = 1$**(3)**. Ако ги поделиме првите две од последните три равенки се добива $y = \frac{9}{4}x$, па со замена во третата равенка се добива $\frac{9}{4}x^2 = 1$, т.е. $x^2 = \frac{4}{9}$ **(...2)**. Броеви за кои е исполнета последната равенка се $x = \frac{2}{3}$ и $x = -\frac{2}{3}$. Лесно се добива $y = \pm\frac{3}{2}$ и $z = \pm 6$ **(...5)**.

3. Бројот $\overline{abc}$ е делив со 37. Докажи дека и бројот $\overline{bca} + \overline{cab}$ е делив со 37.

Решение. За трите броја запишани со истите цифри како дадениот важи

$$\begin{aligned} \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} &= 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b = \\ &= 111a + 111b + 111c = 37(3a + 3b + 3c) \qquad \textbf{(...10)}, \end{aligned}$$

односно $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 37k$ **(...5)**.

Но од условот имаме дека $\overline{abc} = 37m$. Тогаш добиваме $\overline{bca} + \overline{cab} = 37(k - m)$, што и требаше да се докаже **(...5)**.

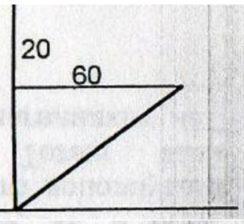
Решение 2. Збирот $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ може да се запише во облик

$$\begin{aligned} \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} &= 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b = 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c) = \\ &= 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c) \qquad \textbf{(...10)} \end{aligned}$$

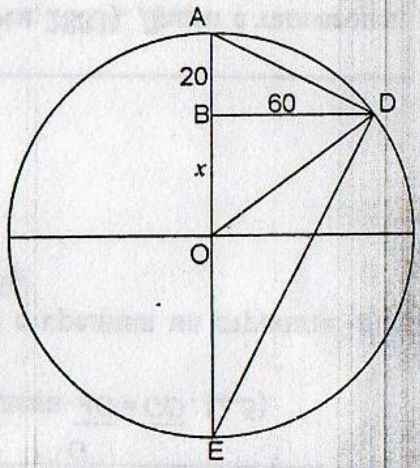
Значи $37 \mid \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ **(...5)**.

Но тогаш $37 \mid \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} - \overline{abc} = \overline{bca} + \overline{cab}$ **(...5)**.

4. Водена трска чии врв се наоѓа 20 cm над површината од едно планинско езеро, под налет на ветрот ја допрел водата и исчезнал во точка оддалечена 60cm од местото каде што првобитно се наоѓал. Сметајќи дека трската е доволно крута за да остане права при движењето определи ја длабочината на езерото.



Решение. Конструираме кружница со центар во дното на трската и радиус $l=\overline{OD}=\overline{OA}$-должината на трската **(10)**. Да забележиме дека триаголникот $\triangle ADE$ е правоаголен па триаголникот $\triangle ABD$ е сличен со $\triangle DBE$ од каде имаме $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BE}}$, што значи дека $\overline{BE}=\frac{\overline{BD}^2}{\overline{AB}}$. **(5)** Од друга страна $\overline{BE}=2x+20$, па $x=80$ cm. **(5)**



5. Еден тест со заокружување на понудени решенија се состои од 20 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат 8 поени, а за погрешно решена се одземаат 5 поени. Доколку на некоја задача не се заокружи ниеден од понудените одговори, за неа се даваат 0 поени. Некој ученик на крајот освоил 13 поени. Колку задачи точно решил ученикот?

Решение. Нека x е бројот на точно решени задачи, y е бројот на неточно решени задачи, а z е бројот на задачи на кои ученикот не одговорил ништо. Според условите од задачата, се добива системот $\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 8x - 5y = 13 \end{cases}$ **(...5)**

при што x, y и z се ненегативни цели броеви.

Од втората равенка, се добива дека $8x=13+5y$, т.е.

$x=\frac{13+5y}{8}=1+\frac{5+5y}{8}=1+\frac{5}{8}(1+y)$ **(...3)**

од каде, за x да е цел број, треба $1+y$ да биде делив со 8, т.е. $1+y=0$ или $1+y=8$ или $1+y=16$ **(...6)**. При тоа

1) $y=-1$, што не можно, бидејќи y не може да е негативен. **(...2)**

2) $y=7$, $x=\frac{13+5y}{8}=\frac{48}{8}=6$, $z=20-6-7=7$ **(...2)**

3) $y=15$, $x=\frac{13+5\cdot 15}{8}=11$, $z=20-15-11=-6<0$, што не е можно бидејќи $z\in\mathbb{N}$.

Значи, ученикот одговорил точно на 7 задачи. **(...2)**