



### IV одделение деветолетка

1. Коста, Јане и Владимир засадиле дрвца: круша, јаболка и вишна. Секој засадил по едно дрво, чие име не започнува на иста буква како неговото име. Кој кое дрво го засадил, ако се знае дека Владимир не засадил круша?

Решение. Со пополнување на табелата се добива дека Коста засадил вишна, Јован круша и Владимир јаболка.

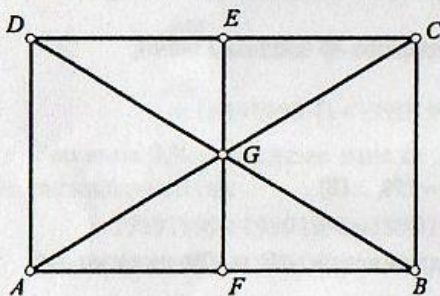
|          | круша | јаболки | вишна |
|----------|-------|---------|-------|
| Коста    | -     | -       | +     |
| Јане     | +     | -       | -     |
| Владимир | -     | +       | -     |

2. Цвета имала кокошки. Осум кокошки неселе за една недела 32 јајца. Колку јајца ќе снесат за една недела девет кокошки?

Решение. Ако осум кокошки за една недела снеле 32 јајца, тогаш една кокошка за една недела ќе снеси 4 јајца...(12). Сега, девет кокошки за една недела ќе снесат

$$9 \cdot 4 = 36$$

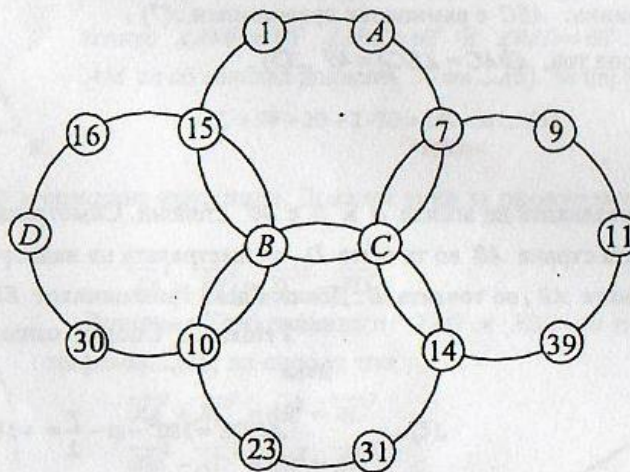
јајца...(8).



3. Што има повеќе на цртежот: отсечки или триаголници.

Решение. Бројот на отсечки е  $5 \cdot 3 + 2 = 17$ ...(5). Со непосредно броење имаме дека бројот на триаголници е 12...(10). Бидејќи  $17 > 12$ , повеќе има отсечки...(5).

4. Збирот на броевите во секој од дадените четири прстени е 90. Кои броеви се кријат на местата означени со буквите A, B, C и D?



Решение. Од десниот прстен добиваме дека  $C = 90 - (7 + 9 + 11 + 39 + 14) = 10$ . ... (5)

Од долниот прстен добиваме дека  $B = 90 - (10 + 14 + 31 + 23 + 10) = 2$ . ... (5)

Од левиот прстен добиваме дека  $D = 90 - (2 + 10 + 30 + 16 + 15) = 17$ . ... (5)

Од горниот прстен добиваме дека  $A = 90 - (1 + 7 + 10 + 2 + 15) = 55$ . ... (5)

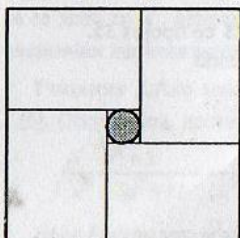
5.(Нумерус, Конкурсни задачи 2804). Најди го збирот на непарните трицифрени броеви чии цифри имаат производ 140.

Решение. Бројот  $140 = 10 \cdot 14 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \dots(8)$ . Следува бараните броеви имаат цифри 4, 5 и 7 и тие се 547, 574, 745, 754... $(8)$ . Оттука нивниот збир изнесува  $547 + 574 + 745 + 754 = 2620 \dots(4)$ .



### V одделение деветолетка

1.(Нумерус, Конкурсни задачи 2805) Продавница е во форма на квадрат со страна 7 метри, Во продавницата се наоѓа статуа со квадратна основа со страна од 1 метар. Дали може преостанатот дел од продавницата да се покрие со 4 правоаголници со страни 3 и 4 метри (одговорот да се објасни).



**Решение.** Да можно е, на пример ако статуата се постави во средината на продавницата...(со цртеж...10), а правоаголниците околу неа, како што е прикажано на цртежот...(10).

2.( Нумерус,Рубрика задачи 2790) Тетратка има 100 страници нумерирани од 1 до 100. Од неа се искинати 30 произволно избрани листови, и потоа е пресметан збирот на нумерираните броеви од преостанатите страници. Дали е можно овој збир да биде еднаков на 800?

**Решение.** Најмалата можна вредност на сумата од нумерираните броеви на неискинатите страници е  $1+2+3+\dots+40=820>800$ ...(13)

Следува не е можно оваа сума да биде 800...(7).

3. Јане го прашал Филип колку тежела рибата што ја уловил татко му. Филип одговорил: Главата заедно со опашката има 3kg, главата заедно со трупот има 7kg, а трупот заедно со опашката има 8kg. Колку тежела рибата?

**Решение 1.**Ако ги собереме дадените тежини...(5), тогаш во збирот двапати ќе учествува тежините и на главата и на опашката и на трупот...(5). Според тоа, тежината на рибата е половина од пресметаниот збир...(5).

Според тоа, ако  $x$  е тежината на рибата, тогаш

$$x=18:2=9 \text{ kg} \dots(5).$$

**Решение 2.**Нека  $G$  е масата на главата,  $O$  е масата на опашката, а  $T$  е масата на трупот. Од условите на задачата имаме:

$$G+O=3, \quad G+T=7, \quad T+O=8. \quad \dots(5)$$

Ако собереме леви и десни страни, добиваме:

$$G+O+G+T+T+O=18(5), \text{ т.е. } 2G+2O+2T=18, \quad 2(G+O+T)=18. \quad \dots(10)$$

Оттука  $G+O+T=9$ , па рибата тежела 9kg. ....(5)

4. Една цевка за 3 часа полни  $\frac{1}{5}$  од еден базен, а друга за 4 часа  $\frac{1}{4}$  од истиот базен, а трета цевка за 6 часа полни  $\frac{1}{3}$  од истиот базен. Која цевка го полни базенот најбрзо?

**Решение.** Првата цевка за 3 часа полни  $\frac{1}{5}$  од базенот, па за еден час ќе наполни  $\frac{1}{15}$  од базенот, од каде имаме дека целиот базен првата цевка ќе го наполни за 15 часа...(5). Втората цевка за еден час ќе наполни  $\frac{1}{16}$  од базенот, па целиот базен ќе биде наполнет за 16 часа...(5). Третата цевка за еден час ќе наполни  $\frac{1}{18}$  од базенот, па целиот базен ќе биде наполнет за 18 часа...(сумарно 5+5+5). Значи, првата цевка го полни базенот најбрзо...(5).

5.Филип за роденден од баба му и дедо му добил 405 денари. Од баба му добил 3 пати повеќе пари од бројот на нејзините години, а од дедо му четири пати повеќе пари од бројот на неговите години. По колку години имаат баба му и дедо му на Филип ако се знае дека дедо му е 5 години постар од баба му.

**Решение.**Ако баба му на Филип има  $x$  години, дедо му има  $x+5$  години...(5). За роденденот баба му му дала  $3x$  денари а дедо му му дал  $4x+20$  денари...(5). Заедно му дале  $7x+20$  денари...(5). Според тоа

$$7x+20=405$$

$$7x=385$$

$$x=385:7=55$$

**Значи, баба му имала 55 години, а дедому имал 60 години...(5).**



### V одделение осмолетка

1. Жабата има скок долг 50 cm, зајакот 75 cm а кенгурот 90 cm. Кое е најмалото растојание на кое сите ќе се сретнат, ако тие почнале да скокаат истовремено. Колку скока тогаш направил секое од животните?

**Решение.** Доволно е да се најде најмалиот заеднички содржател на броевите 50, 75 и 90 ... (5). Бидејќи

$$НЗС(50, 75, 90) = 450 \dots (5)$$

Најмалото растојание на кое тие ќе направат цел број на скокови е 450 cm ... (5). Притоа, жабата ќе направи 9 скока, зајакот 6 а кенгурот 5 скока ... (5).

2. Најди го количникот и остатокот при делењето на изразот  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 75$  со бројот 35.

**Решение:** Изразот  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 75$  можеме да го запишеме во следниот облик:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 35 \cdot 2 + 5 = \dots (5)$$

$$= 35 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 35 \cdot 2 + 5 = \dots (5)$$

$$= 35 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 2) + 5 \dots (5)$$

Според тоа, бараниот количник е  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 2 = 13685762$ , а остатокот е 5 ... (5).

**Решение 2.** Ќе го пресметаме збирот  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 75$  Притоа добиваме

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 75 = 479001600 + 75 = 479001675 \dots (5).$$

Ако делиме со 35 добиваме

$$479001675 : 35 = 13685762$$

35

129

.....

... (5)

5

Според тоа  $479001675 = 13685762 \cdot 35 + 5 \dots (5)$ .

Значи, бараниот количник е 13685762 а остаток е 5 ... (5).

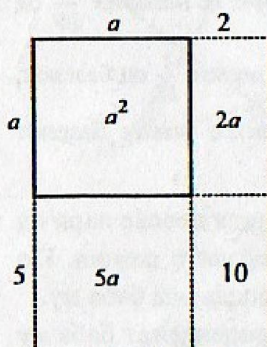
3. Нека  $\alpha$  и  $\beta$  се два соседни агли такви што нивните симетрали се заемно нормални. Ако се знае дека  $\alpha$  е за  $30^\circ$  поголем од  $\beta$ , пресметај колку степени изнесува секој од нив.

**Решение.** Бидејќи аглите се соседни и нивните симетрали се заемно нормални добиваме дека  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$ , односно  $\alpha + \beta = 180^\circ \dots (5)$ . Бидејќи знаеме дека  $\alpha$  е за  $30^\circ$  поголем од  $\beta$ , добиваме дека

$\alpha = \beta + 30^\circ \dots (5)$ . Ако го замениме ова во  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , добиваме  $\beta = 75^\circ \dots (5)$ . Па според тоа  $\alpha = 105^\circ \dots (5)$ .

4. (Нумеус, Рубрика задачи 2808) Да се најде природниот број  $\overline{abc}$  кој го исполнува условот  $\overline{abc} + \overline{bc} + c = 687$

**Решение.** Цифрата на единиците на бројот  $\overline{abc} + \overline{bc} + c$  е цифрата на единиците на  $c + c + c$ , односно  $c + c + c$  завршува на 7 ... (5). Единствена можност е  $c = 9 \dots (5)$ . Оттука добиваме дека  $100a + 20b + 27 = 687$  односно  $5a + b = 33 \dots (5)$ . Последната равенка е исполнета ако  $a = 5$  и  $b = 8$  или  $a = 6$  и  $b = 3$ . Значи бараните броеви се 589 и 639 ... (5).



5. Ако едната страна на квадратот ја продолжиме за 2 cm, а нејзината соседна страна за 5 cm, тогаш добиваме правоаголник чија што плоштина е за  $45 \text{ cm}^2$  поголема од плоштината на квадратот. Колкава е плоштината на квадратот?

**Решение.** Нека страната на квадратот има должина  $a$ . Правоаголникот кој се добива со продолжувањето на страните на квадратот има страни  $a + 2$  и  $a + 5$ . Плоштината на квадратот е  $a \cdot a$ , а на правоаголникот  $(a + 2) \cdot (a + 5)$ . ... (5) Но, правоаголникот всушност е добиен со доцртување на три правоаголници до дадениот квадрат и тоа правоаголници со плоштини  $2a, 5a, 2 \cdot 5$ . ... (5) (види цртеж) Тогаш вкупното зголемување на плоштината на квадратот е

$45 \text{ cm}^2 = 2a + 5a + 10 = (7a + 10) \text{ cm}^2$ . ... (5) Оттука,  $7a = 35$ , односно страната на квадратот е  $a = 5 \text{ cm}$ . Плоштината на квадратот изнесува  $25 \text{ cm}^2$ . ... (5)



## VI Подделение

1. (Нумерус, Рубрика задачи 2773) Ако на еден двоцифрен број му се допише цифрата 5 еднаш на почетокот, а другпат на крајот, се добиваат два различни броја чија разлика е 252. Кој е тој двоцифрен број?

**Решение.** Нека бараниот двоцифрен број го означиме со  $\overline{xy} = 10x + y \dots (4)$ . Тогаш од условот на задачата имаме две можности:

1.  $5\overline{xy} - \overline{xy}5 = 252$ , од каде што добиваме:

$$5 \cdot 100 + x \cdot 10 + y - (x \cdot 100 + y \cdot 10 + 5) = 252 \Leftrightarrow 500 + 10x + y - 100x - 10y - 5 = 252 \Leftrightarrow 243 = 90x + 9y \Leftrightarrow 27 \cdot 9 = 9(10x + y) \Leftrightarrow 27 = 10x + y$$

Значи бараниот број е 27... (7)..

2. Втората можност е  $\overline{xy}5 - 5\overline{xy} = 252$ , од каде со постапка аналогна со претходниот случај добиваме дека  $10x + y = 83 \dots (7)$ .

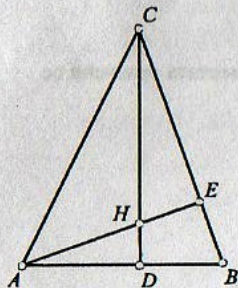
Па бараните двоцифрени броеви се 27 и 83... (2).

2. (Нумерус, подготвителни задачи задача 11, 2009/2010) Една слаткарница добила нарачка да направи извесен број на слатки за три дена. Првиот ден направила  $\frac{2}{5}$  од нарачаните слатки, вториот ден направила  $\frac{5}{9}$  од остатокот од нарачката а третиот ден ги направила преостанатите 40 слатки од нарачката. Колку слатки биле нарачани во слаткарницата?

**Решение.** Нека со  $x$  го означиме бројот на нарачаните слатки. Тогаш првиот ден се направени  $\frac{2}{5}x$  од слатките... (2), вториот ден се направени  $\frac{5}{9}\left(x - \frac{2}{5}x\right)$ ... (5), а третиот ден се направени 40 слатки. Значи,

$$\frac{2}{5}x + \frac{5}{9}\left(x - \frac{2}{5}x\right) + 40 = x \dots (5)$$

Со решавање на оваа равенка се добива дека бројот на нарачани слатки е  $x = 150 \dots (8)$ .

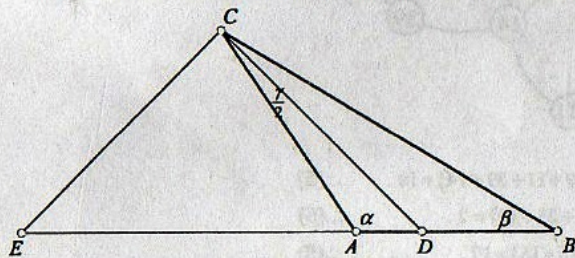


2. Даден е остроаголен триаголник  $ABC$ . Неговите висини  $AE$  и  $CD$  се сечат во точката  $H$ , при што  $\overline{AB} = \overline{CH}$ . Пресметај го аголот  $\angle ACB$ .

**Решение.** Бидејќи  $\angle EAB = \angle BCD$  (агли со нормални краци)... (5), триаголниците  $ABE$  и  $CHC$  се складни (според признакот АСА)... (5). Сега  $\overline{CE} = \overline{AE}$ , односно триаголникот  $AEC$  е рамнокрак правоаголен... (7).

Според тоа,  $\angle BAC = \angle ECA = 45^\circ \dots (3)$ .

4. Нека во триаголникот  $ABC$ , разликата на аглие  $\alpha$  и  $\beta$  е  $90^\circ$  степени. Симетралата на внатрешниот агол  $\gamma$  при темето  $C$  ја сече спротивната страна  $AB$  во точката  $D$ , а симетралата на надворешниот агол при темето  $C$  го сече продолжението на страната  $AB$ , во точката  $E$ . Докажи дека триаголникот  $EDC$  е рамнокрак.



**Решение.** Според ознаките на цртежот имаме дека

$$\angle CDE = 180^\circ - \alpha - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \alpha - \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{180^\circ - \alpha + \beta}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ \dots (7)$$

Бидејќи краците на аголот  $DCE$  се симетрала на суплементни агли, следува  $\angle DCE = 90^\circ \dots (5)$ .

Бидејќи збирот на внатрешните агли на триаголникот  $EDC$  е  $180^\circ$ , следува дека  $\angle CED = 45^\circ$  ...**(5)**. Значи триаголникот  $EDC$  е рамнокрак ...**(3)**.

5. Во слаткарницата "Кокос" има масички и столови групирани во комплекти на следниов начин: неколку комплекти од една маса со четири ногарки и четири стола со три ногарки, неколку комплекти од една маса со три ногарки и четири стола со четири ногарки. Вкупниот број на ногарки е 264. Колку деца можат да седнат во слаткарницата?

**Решение.** Нека бројот на комплекти од првиот тип го означиме со  $a$ , а на вториот со  $b$ . Вкупниот број на ногарки од првиот тип е  $4+4 \cdot 3=16$ , а од вториот е  $3+4 \cdot 4=19$ . ...**(5)** Сега, за вкупниот број ногарки ја формираме равенката  $16a+19b=264$ . ...**(5)** Оттука,  $19b=264-16a=8(33-2a)$ . Од тоа што 8 ја дели десната страна на последното равенство, јасно е дека мора да ја дели и левата страна. Но 19 не се дели со 8, па останува 8 да е делител на  $y$ , односно  $b \in \{8, 16, 24, \dots\}$ . ...**(5)** Притоа  $19b \leq 264$ . Јасно, тогаш  $b=8$ , а  $a=7$ . Следува дека бројот на слободни места во слаткарницата е  $15 \cdot 4=60$ . ...**(5)**



### VII одделение осмолетка

1. (Нумеус, Рубрика задачи 2799) Докажи дека бројот  
 $19991999 + 19991998 \times 19991999 \times 19992000$

е куб на цел број!

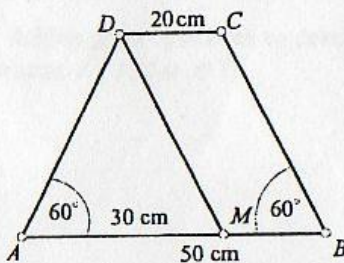
Решение 1. Изразот  $19991999 + 19991998 \times 19991999 \times 19992000$  ќе го запишеме во облик

$$\begin{aligned} 19991999 + 19991998 \times 19991999 \times 19992000 &= 19991999(1 + 19991998 \times 19992000) = \\ &\stackrel{\dots(10)}{=} 19991999 \cdot [1 + (19991999 - 1)(19991999 + 1)] \\ &\stackrel{\dots(5)}{=} 19991999 \cdot [1 + 19991999^2 - 1] = 19991999^3 \end{aligned}$$

Решение 2. Ќе воведеме ознака  $n = 19991999$ . Тогаш  $19991999 + 19991998 \times 19991999 \times 19992000$  може да се запише во облик

$$19991999 + 19991998 \times 19991999 \times 19992000 = n + (n-1)n(n+1) = n + n(n^2 - 1) = n + n^3 - n = n^3.$$

Значи  $19991999 + 19991998 \times 19991999 \times 19992000$  е полн куб за  $n = 1999$ .

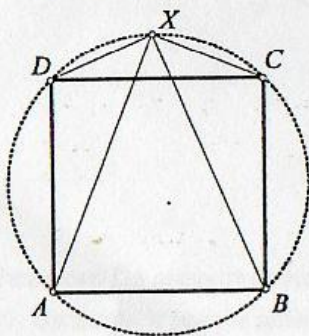


2. Еден рамнокрак трапез има основи  $\overline{AB} = 50$  cm,  $\overline{CD} = 20$  cm и агол  $\angle BAD = 60^\circ$ . Најди го периметарот на трапезот.

Решение. Нека  $DM \parallel BC$  ....(5) Триаголникот  $AMD$  е рамностран затоа што аглите  $\angle AMD = 60^\circ$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$  и  $\angle BAD = 60^\circ$  ....(5). Затоа отсечките  $AD$  и  $AM$  се со еднаква должина 30 cm ....(5). За периметарот се добива дека

$$L = 50 + 20 + 2 \cdot 30 = 130 \text{ cm} \dots(5).$$

3. Околу квадратот  $ABCD$  е опишана кружница. Докажи дека за произволна точка  $X$  од кружницата е точно равенството



$$\overline{XA}^2 - \overline{XB}^2 = \overline{XC}^2 - \overline{XD}^2.$$

Решение. Триаголниците  $XAC$  и  $XBD$  се правоаголници (според Талесова теорема) ....(5), па според тоа

$$\begin{aligned} \overline{XA}^2 + \overline{XC}^2 &= 4R^2 = \overline{AC}^2 \\ \overline{XB}^2 - \overline{XD}^2 &= 4R^2 = \overline{BD}^2 \end{aligned} \dots(5),$$

каде  $R$  е радиусот на опишаната кружница. Сега лесно се добива равенството

$$\overline{XA}^2 - \overline{XB}^2 = \overline{XC}^2 - \overline{XD}^2 \dots(5).$$

Ако пак  $X$  е едно од темињата, на пример  $A$ , тогаш

$$-\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2,$$

односно

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2,$$

што всушност е питагорина теорема. Аналогна е дискусијата и за останатите три темиња ....(5).

4. Докажи дека дробката  $\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}$  е нескратлива за секој цел број  $a$ .

**Решение 1.**  $\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11} = \frac{a^2+3}{a^4+6a^2+9+a^2+2} = \frac{a^2+3}{(a^2+3)^2+(a^2+3)-1}$ . (13) Нека броителот  $a^2+3$  е делив со

некој цел број  $k$ . Тогаш именителот на дробката не се дели со  $k$ , бидејќи  $(a^2+3)^2$  и  $(a^2+3)$  се делат со  $k$ , но  $-1$  не се дели со  $k$ , односно именителот дава остаток  $1$  при делењето со  $k$ . Значи броителот и именителот немаат заеднички делител различен од  $1$ , па дробката е нескратлива. (7)

**Решение 2.** Ако именителот на дробката го поделиме со  $a^2+3$ , добиваме количник  $a^2+4$  и остаток  $-1$  ... (5). Според тоа, дробката можеме да ја запишеме да ја запишеме во облик

$$\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11} = \frac{a^2+3}{(a^2+3)(a^2+4)-1} \dots (5).$$

Нека броителот  $a^2+3$  е делив со некој цел број  $k$ . Тогаш именителот на дробката не се дели со  $k$ , бидејќи  $(a^2+3)(a^2+4)$  се дели со  $k$ , но  $-1$  не се дели со  $k$ , односно именителот дава остаток  $k-1$  при делењето со  $k$  ... (5). Значи броителот и именителот немаат заеднички делител различен од  $1$ , па дробката е нескратлива ... (5).

**5. (Нумерус, подготвителни задачи, задача 10, 2010/2011)** Нека  $p, p-10$  и  $p+10$  се прости броеви. Докажи дека  $p-2$  е исто така прост број.

**Решение.** Нека  $p$  е прост број кој ги исполнува условите од задачата. Тогаш од равенствата

$$p-10 = p-1-9$$

$$p+10 = p+1+9,$$

забележуваме дека остатокот од делењето со  $3$  на  $p-10$  е ист како остатокот од делењето на  $p-1$  со  $3$ , како и остатокот од делењето со  $3$  на  $p+10$  е ист остатокот од делењето на  $p+1$  со  $3$  ... (7).

Еден од броевите  $p-1, p, p+1$  е делив со  $3$  (три последователни броеви) ... (5). Според тоа, еден од броевите  $p-10, p, p+10$  е делив со  $3$  ... (5).

Но сега, од условот на задачата имаме  $p-10=3$ , односно  $p=13$ . Сега  $p-2=11$  е исто така прост број ... (3).





### VIII одделение осмолетка

1. (Нумерус, Конкурсни задачи 2762) Најди ги сите природни броеви  $n$  така што сумата

$$1+1 \cdot 2+1 \cdot 2 \cdot 3+\dots+1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n$$
 е точен квадрат.

Решение. За  $n=2,3,4,5$  имаме:

$$1+1 \cdot 2=3,$$

$$1+1 \cdot 2+1 \cdot 2 \cdot 3=9,$$

$$1+1 \cdot 2+1 \cdot 2 \cdot 3+1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4=33,$$

$$1+1 \cdot 2+1 \cdot 2 \cdot 3+1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4+1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5=153 \dots(5)$$

Секој нареден природен број од облик  $1+1 \cdot 2+1 \cdot 2 \cdot 3+\dots+1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n$  завршува на 3 бидејќи бројот  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n$  ги содржи 2 и 5 како множители од каде ќе завршува на нула... (10). Но квадрат на природен број не може да завршува на 3 па решението на задачата се броевите 1 и 3... (5).

2. (Нумерус, Конкурсни задачи 2802) Ако  $a+b+c=0$ , тогаш  $\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ac} + \frac{c^2}{2c^2+ab} = 1$ . Докажи!

Решение. Во првиот член од равенството  $a$  го заменуваме со  $-b-c$  и добиваме

$$\frac{a^2}{2a^2+bc} = \frac{(b+c)^2}{2(b+c)^2+bc} = \frac{(b+c)^2}{2b^2+2c^2+5bc} = \frac{(b+c)^2}{(2b+c)(b+2c)}.$$

$$\text{Меѓутоа } \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{b+2c} = \frac{3(b+c)}{(2b+c)(b+2c)}. \text{ Тогаш } \frac{(b+c)^2}{(2b+c)(b+2c)} = (b+c) \frac{(b+c)}{(2b+c)(b+2c)} = \frac{1}{3} \left( \frac{(b+c)}{(2b+c)} + \frac{(b+c)}{(b+2c)} \right) \dots(7).$$

Во последното равенство повторно користиме  $a+b+c=0$  и добиваме

$$\frac{(b+c)^2}{(2b+c)(b+2c)} = \frac{1}{3} \left( \frac{(b+c)}{(b-a)} + \frac{(b+c)}{(c-a)} \right) \dots(5).$$

Аналогно добиваме

$$\frac{b^2}{2b^2+ac} = \frac{1}{3} \left( \frac{(a+c)}{(a-b)} + \frac{(a+c)}{(c-b)} \right) \text{ и}$$

$$\frac{c^2}{2c^2+ab} = \frac{1}{3} \left( \frac{(a+b)}{(a-c)} + \frac{(a+b)}{(b-c)} \right) \dots(5).$$

Ако ги собереме последните три равенства добиваме

$$\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ac} + \frac{c^2}{2c^2+ab} = \frac{1}{3} \left( \frac{(b+c)}{(b-a)} + \frac{(b+c)}{(c-a)} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{(a+c)}{(a-b)} + \frac{(a+c)}{(c-b)} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{(a+b)}{(a-c)} + \frac{(a+b)}{(b-c)} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{b+c-a-c}{b-a} + \frac{b+c-a-b}{c-a} + \frac{a+c-a-b}{c-b} \right) = \frac{1}{3} (1+1+1) = 1. \dots(3)$$

3. Три девојчиња Ана, Марија и Елена во шумата собрале 770 костени и одлучиле да си ги поделат меѓу себе пропорционално на своите години. Секој пат кога Марија зела 4 костени, Ана зела 3, а на секои 6 што ги зела Марија, Елена зела 7 костени. Колку години има секое девојче ако заедно имаат 35 години? По колку костени припаднало на секоја од нив?

Решение. Нека  $a$  се годините на Ана,  $m$  се годините на Марија, а  $e$  се годините на Елена. Па според тоа,  $a+m+e=35 \dots(5)$ . Годините се однесуваат како костените и тоа:

$$m:a=4:3, \quad m:e=6:7$$

$$a=\frac{3}{4}m, \quad e=\frac{7}{6}m \dots(5)$$

Сега,

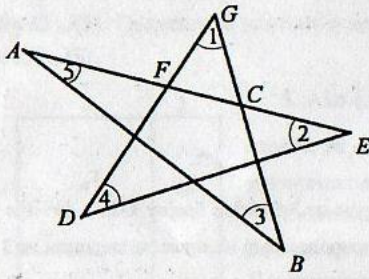
$$m + \frac{3}{4}m + \frac{7}{6}m = 35$$

$$\frac{12m+9m+14m}{12} = 35$$

$$\frac{35}{12}m = 35$$

$$m=12, \quad a=\frac{3}{4} \cdot 12=9, \quad e=\frac{7}{6} \cdot 12=14 \dots(5)$$

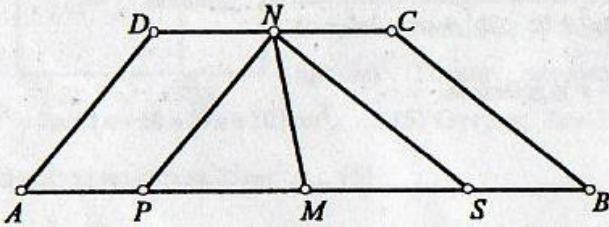
Бидејќи  $770:35=22$ , следува дека на Марија и припаднале  $22 \cdot 12=264$  костени, на Ана  $22 \cdot 9=198$  костени, а на Елена  $22 \cdot 14=308$  костени. (5)



4. Дадена е звезда како на цртежот. Колку е збирот на аглие  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ .

Решение: Од триаголникот  $\triangle ABC$  имаме  $\angle 3 + \angle 5 = \angle FCG$  ... (5). Од триаголникот  $\triangle DEF$ ,  $\angle 2 + \angle 4 = \angle CFG$  ... (5). Од триаголникот  $\triangle FCG$ ,

$$180^\circ = \angle 1 + \angle FCG + \angle CFG = \angle 1 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 2 + \angle 4 \dots (10)$$



5. Даден е трапезот  $ABCD$  со основи  $\overline{AB} = 16 \text{ cm}$ ,  $\overline{CD} = 8 \text{ cm}$ . Збирот на аглие  $ABC$  и  $BAD$  е  $90^\circ$ . Ако  $M$  и  $N$  се средини на страните  $AB$  и  $CD$  соодветно, пресметај ја должината на отсечката  $MN$ .

Решение. Нека  $P$  и  $S$  се точки на страната  $AB$  т.ш.  $NP \parallel AD$  и  $NS \parallel BC$  ... (7). Триаголникот  $PNS$  е правоаголен, со прав агол во темето  $N$  затоа што

$$\angle PSN + \angle SPN = \angle ABC + \angle BAD = 90^\circ \dots (5)$$

$MN$  е тежишна линија кон хипотенузата и затоа

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{PS} = \frac{1}{2} (16 - 4 - 4) = 4 \dots (8)$$