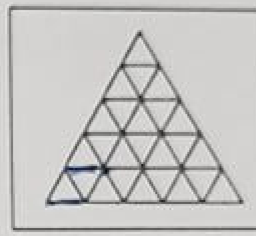
ЧЕТВРТА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
ЗА УЧЕНИЦИ ДО 15,5 ГОДИНИ

1. Рамностран триаголник со должина на страната n, ($n \in \mathbb{N}$), е поделен со прави паралелни на страните на рамнострани триаголници со должина на страната 1 (за $n=5$ види цртеж). Некои од новодобиените отсечки со должина 1 и крајни точки во темињата на малите триаголници ги боиме со црвена боја. Колку најмногу отсечки со должина 1 и крајни точки во темињата на малите триаголници може да обоиме така што да не постои рамностран триаголник со страна 1 чии страни се обоени?



2. Нека M е средина на основата AB на трапезот $ABCD$ ($\overline{AB} > \overline{CD}$), а P е произволна точка од правата BC. Ако $PM \cap AC = Q, DQ \cap AB = X$ и $DP \cap AB = Y$, докажи дека точката M е средина на отсечката XY.

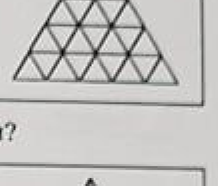
3. Дадени се десет природни броеви $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_{10}$ кои не се поголеми од 90. Докажи дека количникот на некои два од нив е број x кој го задоволува условот
$$\frac{2}{3} \le x \le \frac{3}{2}.$$

4. Отсечките AB и CD се сечат во точаката O. Ако $\overline{AB} = \overline{CD} = 1$ и $\angle AOC = 60^\circ$, докажи дека $\overline{AC} + \overline{BD} \ge 1$.

5. Нека a, b и c се ненулти цели броеви такви што $a \ne c$ и $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$. Докажи дека $a^2+b^2+c^2$ не може да биде прост број.

Време за работа 240 минути.
Секоја задача се вреднува со 20 поени.

1. Рамностран триаголник со должина на страната $n, n \in \mathbf{N}$ е поделен со прави паралелни на страните на рамнострани триаголници со должина на страната 1 (за $n = 5$ види цртеж). Некои од новодобиените отсечки со должина 1 и крајно точки во темињата на малите триаголници ги боиме со црвена боја. Колку најмногу отсечки со должина 1 и крајни точки во темињата на малите триаголници може да обоиме така што да не постои рамностран триаголник со страна 1 чиј страни се обоени?



Решение. Бројот на отсечките со должина 1, паралелни на секоја страна од триаголникот е еднаков на

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

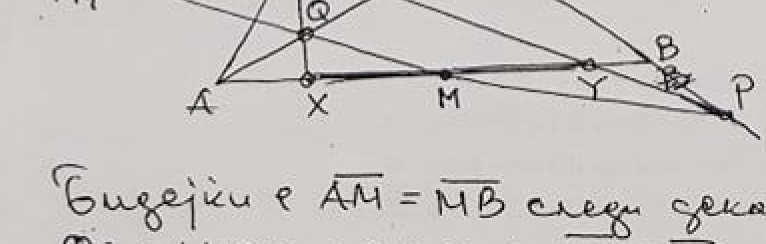
што значи дека вкупниот број на отсечки со должина 1 е еднаков на $\frac{3n(n+1)}{2}$. Секои две отсечки, паралелни со две страни на почетниот триаголник не формираат мал триаголник, бидејќи секој мал триаголник се состои од три отсечки кои се паралелни на сите три страни. Според тоа, сигурно може да се обојат $\frac{2}{3}\cdot\frac{3n(n+1)}{2}=n(n+1)$ отсечки со должина 1.

Ќе докажеме дека повеќе отсечки не може да се обојат. Да шрафираме триаголници со должина на страна 1 како на цртежот. Овие триаголници ги содржат сите отсечки со должина 1, при што секоја отсечка припаѓа само на еден триаголник. Затоа, за да не може да се состави ниеден од шрафираните триаголници, во секој може да се обојат најмногу 2 отсечки. Според тоа, бројот на обоени отсечки не е поголем од $\frac{2}{3}$ од вкупниот број отсечки, т.е. не е поголем од $\frac{2}{3}\cdot\frac{3n(n+1)}{2}=n(n+1)$.

---

2. Нека M е средина на основата AB на трапезот ABCD, а P произволна точка од правата BC. Ако $PM \cap AC = Q$ $DQ \cap AB = X$ и $DP \cap AB = Y$, тогаш точката M е средина на отсечката XY. Докажи.

Доказ:



За ја конструираме точка: $M_1 = PM \cap DC$.

Од $\Delta PDM_1 \sim \Delta PYM \Rightarrow \overline{MY} : \overline{M_1D} = \overline{PY} :$

Од $\Delta PCD \sim \Delta PBY \Rightarrow \overline{PY} : \overline{PD} = \overline{PB} : \overline{PC}$

Од $\Delta PCM_1 \sim \Delta PBM \Rightarrow \overline{PB} : \overline{PC} = \overline{MB} : M_1$

Бидејќи е $\overline{AM} = \overline{MB}$ следи дека: $\overline{MB} : \overline{M_1C} = \overline{AM} : \overline{M_1C}$.

Од $\Delta AMQ \sim \Delta CM_1Q \Rightarrow \overline{MX} : \overline{MA} = \overline{M_1D} : \overline{M_1C}$ или $\overline{MA} : \overline{M_1C} = \overline{MX} : \overline{M_1}$

Имаме: $\frac{\overline{MY}}{\overline{M_1D}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{M_1C}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{M_1C}} = \frac{\overline{MX}}{\overline{M_1D}}$, т.е. $\overline{MY} = \overline{MX}$.

3. Дадени се десет природни броеви $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots \le a_{10}$ кои не се поголеми од 90. Докажи дека количникот на некои два од нив е број x кој го задоволува условот

$$\frac{2}{3} \le x \le \frac{3}{2} \qquad (*)$$

Решение. Ќе докажеме дека некој од количниците

$$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \dots, \frac{a_{10}}{a_9} \qquad (**)$$

го задоволува условот (*). Бидејќи секој од броевите не е помал од 1 и бидејќи $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_{10}$ заклучуваме дека секој од броевите во (**) е поголем од 1, а тоа значи и од $\frac{2}{3}$. Останува да докажеме дека некој количник не е поголем од $\frac{3}{2}$. Нека претпоставиме дека

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} > \frac{3}{2}, \quad \text{за } i = 1, 2, \dots, 9.$$

Од $a_1 \ge 1$ имаме $a_2 > \frac{3}{2}$ и како $a_2 \in \mathbb{N}$ добиваме $a_2 \ge 2$.

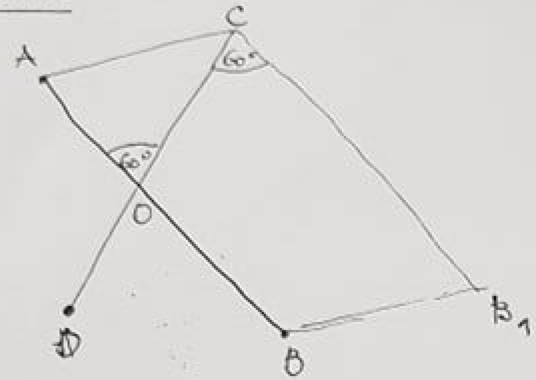
Понатаму имаме: $\frac{a_3}{a_2} > \frac{3}{2}$, па затоа $a_3 > \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$ т.е. $a_3 \ge 4$. Аналогно добиваме: $a_4 \ge 7$, $a_5 \ge 11$, $a_6 \ge 17$, $a_7 \ge 26$, $a_8 \ge$ $a_9 \ge 61$ и $a_{10} \ge 92$.

Последното неравенство противречи на условот $1 \le a_i \le 90$, за $i = 1, 2, \dots, 10$, па затоа мора еден од количниците во (**) да не е поголем од $\frac{3}{2}$.

Отсечките AB и CD се сечат во точката O. Ако $\overline{AB}=\overline{CD}=1$ и $\measuredangle AOC=60^\circ$, докажи дека

$\overline{AC}+\overline{BD}\geq 1$.

Решение:



Нека B_1 е точка така што ABB_1C е паралелограм.
Следува $\overline{AC}=\overline{BB_1}$
Од ΔBDB_1 следува $\overline{BD}+\overline{BB_1}\geq\overline{B_1D}$, односно $\overline{BD}+\overline{AC}\geq\overline{B_1D}$.
$\measuredangle AOC=\measuredangle OCB_1$ (Наизменични агли), па $\measuredangle DCB_1=60^\circ$.
Бидејќи $\overline{CD}=\overline{CB_1}=1$ и $\measuredangle DCB_1=60^\circ$, следува дека ΔDCB_1 е рамностран. Значи $\overline{B_1D}=1$.
Следува

$\overline{BD}+\overline{AC}\geq 1$.

5. Нека a,b и c се ненулти цели броеви такви што $a\neq c$ и $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$. Докажи дека $a^2+b^2+c^2$ не може да биде прост број.

Решение. Равенството $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$ е еквивалентно на равенството $(a-c)(b^2-ac)=0$. Бидејќи $a\neq c$, од последното равенство добиваме $b^2=ac$ и затоа

$$a^2+b^2+c^2=a^2+2b^2+c^2-b^2=a^2+2ac+c^2-b^2=(a+c)^2-b^2=(a+c-b)(a+b+c)$$

Според тоа, ако $a^2+b^2+c^2$ е прост број, тогаш можни се следните случаи:

i) $a+c-b=1$ и $a+b+c=a^2+b^2+c^2$

ii) $a+b+c=1$ и $a-b+c=a^2+b^2+c^2$

iii) $a+c-b=-1$ и $a+b+c=-(a^2+b^2+c^2)$

iv) $a+c+b=-1$ и $a-b+c=-(a^2+b^2+c^2)$

Во случаите *i)* и *ii)*, со собирање на равенствата добиваме $a^2+b^2+c^2-2(a+c)+1=0$ т.е. $(a-1)^2+(c-1)^2+b^2=0$ што е противречност бидејќи $b\neq 0$. Во случаите *iii)* и *iv)*, со собирање на равенствата добиваме $a^2+b^2+c^2+2(a+c)+1=0$ т.е. $(a+1)^2+(c+1)^2+b^2=0$ што е повторно противречност бидејќи $b\neq 0$.