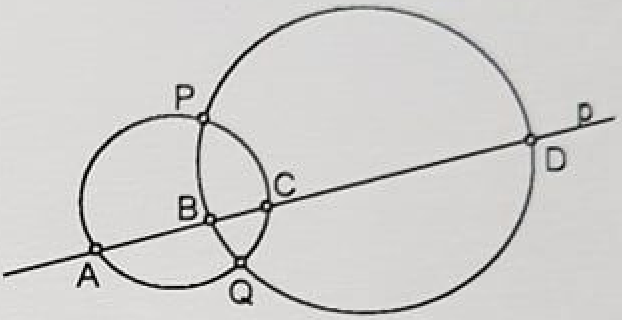
ТРЕТА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
за ученици до 15 и пол години

Скопје, 05.06.1999 г.

1. Докажи дека не постојат цели броеви a,b и c такви што

$$a^2+b^2-8c=6.$$

2. Две кружници се сечат во точките P и Q. Правата p ги сече кружниците во точките A,B,C и D, како на цртежот. Докажи дека $\angle APB=\angle CQD$.



3. Нека A_1, A_2, ... ,A_{1999} се произволни различни точки во рамнината. Докажи дека на која било кружница со радиус 1 постои точка M таква што збирот на растојанијата од M до секоја од точките A_1, A_2, ... ,A_{1999} е поголем или еднаков на 1999.

4. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz=1$. Докажи дека

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geq 2.$$

5. Во паралелограмот ABCD точките M и N се средини на страните BC и CD, соодветно. Докажи дека не е можно правите AM и AN да го делат аголот BAD на три еднакви дела.

Секоја задача се вреднува со 20 бода.
Време за работа: 240 минути.

ТРЕТА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

за ученици до 15 и пол години

05.06.1999 г., Скопје

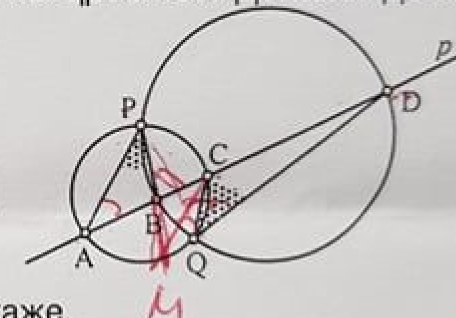
1. Докажи дека не постојат цели броеви a, b и c такви што
$$a^2 + b^2 - 8c = 6.$$

Решение: Нека $a, b, c \in \mathbf{Z}$ така што $a^2 + b^2 - 8c = 6$, односно
$$a^2 + b^2 = 8c + 6 \ldots (1).$$

Бидејќи a^2+b^2 е парен број следи дека бреовите a и b се со иста парност. Ако броевите a и b се парни, тогаш a^2+b^2 е делив со 4. Нека броевите a и b се непарни. Од (1) имаме $a^2 - 1 + b^2 - 1 = 8c + 4$. Следува дека $8 \mid (a^2-1)$ и $8 \mid (b^2-1)$, значи $8 \mid (a^2-1+b^2-1)$, но 8 не е делител на $8c+4$.

Следува дека не постојат цели броеви a, b и c со бараното својство.

2. Две кружници се сечат во точките P и Q. Правата p ги сече кружниците во точките A, B, C и D, како на цртежот. Докажи дека $\angle APB = \angle CQD$.



Решение:

$\angle PAC = \angle PQC$ (како агли над тетивата PC).

$\angle PBD = \angle PQD$ (како агли над тетивата PD).

$\angle PBD$ е надворешен за ΔABP, па имаме дека

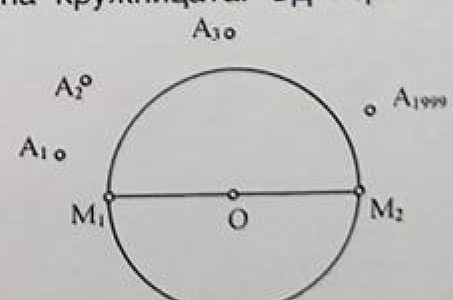
$\angle PBD = \angle PAB + \angle APB$. Се добива:

$\angle APB = \angle PBD - \angle PAB = \angle PBD - \angle PAC =$

$\angle PQD - \angle PQC = \angle CQD$, а тоа требаше да се докаже.

3. Нека $A_1, A_2, \ldots A_{1999}$ се произволни различни точки во рамнината. Докажи дека на која било кружница со радиус 1 постои точка M таква што збирот на растојанијата од M до секоја од точките $A_1, A_2, \ldots A_{1999}$ е поголем или еднаков на 1999,

Решение: Нека k е произволна кружница со радиус 1 и нека M_1 и M_2 се произволни, дијаметрално спротивни точки на кружницата. Од неравенствата на триаголник следува:



$$2 = \overline{M_1M_2} \le \overline{M_1A_1} + \overline{A_1M_2}$$
$$2 = \overline{M_1M_2} \le \overline{M_1A_2} + \overline{A_2M_2}$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$2 = \overline{M_1M_2} \le \overline{M_1A_{1999}} + \overline{A_{1999}M_2}$$

Со собирање на соодветните страни во овие неравенства се добива:
$$2 \cdot 1999 \le (\overline{M_1A_1} + \overline{M_1A_2} + \ldots + \overline{M_1A_{1999}}) + (\overline{A_1M_2} + \overline{A_2M_2} + \ldots + \overline{A_{1999}M_2}).$$

Оттука следува дека барем едиот од изразите во заградите е поголем или еднаков на 1999. Значи, едната од точките M_1 или M_2 е бараната точка M.

4. Нека x, y и z се позитивни реални броеви такви што $xyz = 1$.

Докажи дека $\dfrac{x^2+y^2}{x^6+x^3y^3+y^6}+\dfrac{y^2+z^2}{y^6+y^3z^3+z^6}+\dfrac{z^2+x^2}{z^6+z^3x^3+x^6}\geq 2$.

Решение: Ќе ги искористиме неравенствата помеѓу аритметичката и геометриската средина. За $a, b \geq 0$ важи

$$a^6+a^3b^3+b^6 \geq 3\sqrt[3]{a^9b^9} = 3a^3a^3 \quad \dots (1)$$

Сега, од неравенството (1) имаме

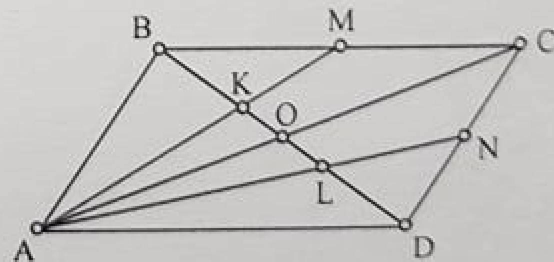
$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6} = a^3+b^3-\frac{2a^3b^3(a^3+b^3)}{a^6+a^3b^3+b^6} \geq a^3+b^3-\frac{2a^3b^3(a^3+b^3)}{3a^3b^3} = \frac{1}{3}(a^3+b^3) \quad \dots(2)$$

Ако во неравенството (2) за a и b последователно ставиме x, y; y, z и z, x и ги собереме соодветните страни на добиените неравенства се добива:

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6} \geq \frac{2}{3}(x^3+y^3+z^3) \geq \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3} = 2,$$

а ова требаше да се докаже.

5. Во паралелограмот ABCD точките M и N се средишни точки на страните BC и CD, соодветно. Докажи дека не е можно правите AM и AN да го делат аголот BAD бна три еднакви дела.



Решение: Да претпоставиме дека тоа е можно. Нека O е пресекот на дијагоналите на паралелограмот. Во ΔABC отсечките BO и AM се тежишни линии. Нека K е нивната пресечна точка. Имаме $\overline{BK}:\overline{KO} = 2:1$. Следува дека $\overline{KO}=\dfrac{\overline{BK}}{2}$. Аналогно, од ΔADC се добива $\overline{LO}=\dfrac{\overline{DL}}{2}$. Од тоа што $\overline{BO}=\overline{OD}$ па се добива $\overline{BK}=\overline{KL}=\overline{LD}$. Значи, во ΔBAL отсечката AK е тежишна линија и симетрала на $\angle BAL$. Се добива дека отсечката AK е висина, т.е. $AK\perp BD$, а оттаму следи дека $AL\perp BD$, што не е можно.